胡庆平

BCI—代数

陕西科学技术出版社

BCI — DAI SHU

统一书号：13202・94
定 价： ~~2.10元~~
4.60元

BCI-代 数

胡庆平 著

—

陕西科学技术出版社

39

BCI—代数

胡庆平 著

陕西科学技术出版社出版发行

（西安北大街131号）

新华书店经销　　西安永新印刷厂印刷

850×1168毫米　32开本　15.5印张　35.3万字

1987年8月第1版　　1987年8月第1次印刷

印数：1—2,600

统一书号：13202·94　　定价：4.60元

序　言

1983年底作者编写了一本讲义《BCI-代数》，1984年上半年作者为西北大学数学系四年级数学专业的学生开设了这门选修课《BCI-代数》。本书是在这本讲义及实际教学工作的基础上修改、增补而成的。

BCK-代数和BCI-代数是六十年代以来出现的一般代数学中的一个新的分支。自K·Iséki等在1966年引入这两类代数以来，虽然只有十八年的历史，但是发展却相当快。至今，从国际上看，已有日本、波兰、捷克、美国、苏丹、印度、巴基斯坦、斯里兰卡、澳大利亚、利比亚和中国等国的一百多位数学工作者投入这一方面的工作。取得了大量的成果，已发表论文数百篇。

我国国内的数学工作者基本上从1980年以后投入这一方面工作。目前，已有山西大学、宁夏大学、山东曲阜师院、陕西师范大学、汉中师范学院和西北大学等单位的几十位数学工作者参加这一方面的工作，并且已写出和发表论文几十篇。1983年 4 月在西安还召开了国内第一次BCK-代数和BCI-代数会议，参加会议的有二十八人，宣读论文多篇。

现在，BCK-代数和BCI-代数理论正在蓬勃发展。这一代数理论还涉及和联系到许多数学分支，如泛代数、群论、环论、格论、点集拓扑和拓扑代数等。

正是在这种形势下，作者在西北大学数学系首先给八〇级学生开设了《BCI-代数》这门选修课，吸收一批有志和对此有兴

趣的青年学生积极投入这一方面的工作。在开设这门选修课时，每周四学时，一学期用了七十二学时，基本上讲完了本书的大部分内容，并且对一部分学生进行了科研训练。该级十一名学生写出了十四篇毕业论文，得到了一批较好的结果。

现在，在国内外同行、西北大学数学系的领导和同志们以及出版社同志的大力帮助和支持下，这本书正式出版了。应当说，这本书是国内外同行们在BCI-代数理论方面的一个总结，尤其是中国数学工作者在这一理论研究工作的总结，当然也是西北大学数学系从事这一理论研究的师生们的工作总结。由于本书是BCI-理论方面国内外的第一本专著，由于作者水平有限和编写时间仓促，本书难免有不少缺陷和错误，承望读者提出批评指正。

对作者在BCI-代数理论研究、教学和编写本书予以支持和帮助过的日本鸣门教育大学K. Iséki教授、北京大学数学系段学复教授、山西大学数学系张宝林副教授、陕西师范大学数学系雷天德副教授、王国俊教授、西北大学数学系凌岭教授、王成堂教授、胡希正副教授和王兆崎、孟杰同志，以及西北大学科研处、教务处，作者在此一并表示感谢。

胡庆平

一九八四年六月二十日于西北大学数学系

内 容 提 要

BCK-代数和BCI-代数是六十年代以来出现的一般代数学的一个分支。这一理论涉及和联系到许多数学分支，如泛代数、群论、环论、格论、布尔代数、点集拓扑和拓扑代数等。

本书是国内、外出现的第一本BCI-代数理论的专著。本书概括了1984年5月前BCI-代数的研究概貌，简介了BCK-代数理论。本书集中地总结了国内外数学工作者、尤其是中国数学工作者在BCI-代数理论的工作成果，也总结了作者自己在这一理论中的研究工作，并介绍了由作者引入的BCH-代数。

本书共分八章：准备工作，BCK-代数概要，BCI-代数的概念及性质，BCI-代数理论中的几个专题，结合BCI-代数，BCI-拓扑代数，BCH-代数，对BCK，BCI，BCH-代数理论进一步发展的一些看法。

数学工作者、大学数学系教师、研究生和高年级学生均可阅读本书。从事理论物理、理论化学和计算机科学研究的工作者和大学教师也可以本书为参考书。

目　　录

第一章　准备工作

在正式接触BCK-代数和BCI-代数理论之前，我们在本章中做一些必要的准备工作。

§1　发展概况

我们在这一节中介绍一下BCK-代数和BCI-代数的发展概况，重点是介绍后者。这对于读者掌握这一理论且愿意进一步在这一方面做出一些工作是十分必要的。我们分作以下几个问题进行介绍。

1．两种代数的引入

由集合论和命题演算作为背景（参看第二章§1．以后简记为：cf·Ⅱ·1）1966年日本数学家Y·Imai和K·Iséki引入了BCK-代数(cf·〔17〕*)．这样，对一切BCK-代数进行研究和对某些条件下的BCK-代数进行研究，就产生了BCK-代数类和BCK-代数理论。

同年，K·Iséki又引入了比BCK-代数类更大的代数类——BCI-代数类[18]，这就又产生了BCI-代数类和BCI-代数理论。由BCK-代数的定义和BCI-代数的定义不难知道：

$$\text{BCK-代数类} \subseteq \text{BCI-代数类。} \qquad (1)$$

* 方括号中出现的数字系参考文献序号，下同。

这两种代数出现后不久便引起了人们的注意。但是，数学界对它的“庐山真面目”尚不清楚，连美国的Review和西德的Zent. Math. 都没有把它列入“一般代数”的类中，而列入“数理逻辑”或“格论”之中。这种现象已经历史地遗留下来了。然而，BCK-代数和BCI-代数理论如同数林中之春苗蓬勃地发展起来了。经过这十七八年的发展，这一理论已成为一般代数学中的一个新的重要分支了。

2. K·Iséki的简况

K·Isēki是日本数学家，日本名是井关清志，今年六十四岁，他在日本神户大学数学系担任教授多年，今年四月他在神户大学退休，而转到日本德岛县鸣门教育大学任教。他到过许多国家，参加过多次国际数学会议，还在波兰巴拿赫数学中心工作过。他也来过中国，和我国许多数学工作者保持着良好的关系。他还和作者一起共同研究过结合的BCI-代数，联名发表论文和作者摘要（cf·〔27—30〕)。他在数学中有广泛的兴趣，在许多分支中都作出过重要的工作。发表过大量的论文。据作者所知，他的主要工作有：

在集合论方面，他在1949年把Kuratowski的四条闭包公理

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

$$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$$

$$A\subseteq\overline{A}$$

$$\overline{\phi}=\phi$$

中的前三条合并为(cf·〔2〕)

$$A\cup\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}=\overline{A\cup B}$$

在点集拓扑中，他作过许多工作。例如，1957年他和Kasahara一起得到了这样一个结果：一个正则空间X是可数紧的当且仅当X

的每个点有限的开复盖有一个有限的子复盖。1954年他得到正规空间X是可数仿紧的充要条件是空间X的每个可数开复盖有一个星有限的开加细。他的这两个结果在点集拓扑学的专著〔11〕中都有所述。

在抽象代数方面，他引入了BCK-代数和BCI-代数的概念，发表了大量的论文，为BCK-代数和BCI-代数理论起了奠基作用。在本书中。我们对他在这方面的工作要作详细的论述。

在现代分析方面，他研究过级数论和2-度量空间理论等。

3．第一个发展阶段

作者认为BCK-代数和BCI-代数理论在发展上可分为两个阶段：1966年—1979年是第一个阶段，1980年至现在是第二个阶段。

第一个发展阶段虽然经历了十四年，但尚属BCK-代数和BCI-代数理论的初级阶段。

第一个阶段中这一理论的最大成就是K·Iséki等引入了BCK-代数和BCI-代数的概念。

对于BCI-代数论来说。在第一阶段中除了K·Iséki在〔18〕中引入了BCI-代数的概念及得到了几个初等结果外，再没有什么进展。这个理论在第一阶段中产生了一点困难。由BCK-代数和BCI-代数的定义容易知道包含关系（1）成立。但是，这种包含是否真包含呢？也就是说，是否存在一个BCI-代数，它不是一个BCK-代数呢？这一点在第一阶段中并不知道，即使K·Iséki本人也没有在1979年前举出这样一个例子来。这个困难影响了BCI-代数理论的发展。

在第一个阶段中BCK-代数理论得到了初步的发展。从日本开始，以后波及到波兰、苏丹和斯里兰卡，有二、三十位作者从事

BCK-代数的研究，写出了几十篇第一批论文。这些成果基本上述在〔19〕中。也大体上是我们这本书第二章的内容。

4．第二个发展阶段

1980年开始，BCK-代数和BCI-代数理论进入了第二个阶段。第二阶段中出现的特点是：

第一，投入这一理论工作的人数大大增加，所在国家已达十个左右，已反映出这一理论成为一个引起国际广泛兴趣的理论。

第二，BCK-代数理论日益深入研究，出现的论文每年成倍增加，成果很多，联系面越来越广泛。

第三，在第一阶段中提出的一些问题大多被解决，又涌现了一批新的和更深入的问题。

第四，第一阶段中BCI-代数理论中所遇到的上述困难被K·Iséki在1980年所解决，他在〔20〕中提出了是BCI-代数、而不是BCK-代数（称为真BCI-代数）的第一个例子。这样，（1）就变成了：

$$\text{BCK-代数类} \subset \text{BCI-代数类。} \qquad (2)$$

由此，BCI-代数理论就成为一个独立的代数理论而出现和得到迅速的发展。K·Iséki在1980年发表了一系列的论文（cf.〔20—26〕），在BCI-代数理论中引进了一系列的概念，得到了许多结果，也提出了一批需要解决的问题.他的这些工作对于BCI-代数的奠基作用是非常明显的。

第五，作者和K·Iséki合作研究了结合BCI-代数，发表了论文和作者摘要〔27—30〕。反映了中国数学工作者开始投入BCK-代数和BCI-代数理论的研究工作。之后，这一理论吸引了大批中国数学工作者，出现了论文〔31—47〕。可以说，中国数学工作者大大地推进了BCI-代数理论的研究，也初步地开始研究

BCK-代数，还引入了较BCI-代数类更大的代数类—BCH-代数类.特别是1983年4月在西安召开的BCK-代数和BCI-代数会议，初步地组织起我国研究BCK-代数和BCI-代数的一支老、中、青相结合的队伍，为进一步开展这一理论研究打下了基础.

§2 要注意的几个问题

在这一节中我们谈几点有关读这本书应当注意的问题。当然，这是写给初次接触这一理论，且尚无进行过科研训练的读者的。注意了这些问题对他们学好这一理论。达到“入门、上路。开展工作”，会有一定的好处。

1. 本书的内容

本书着重介绍BCI-代数，共分八章。

第一章中我们做些必要的准备工作。我们让读者了解BCK-代数和BCI-代数发展的概况，交待几个要注意的问题，叙述有关集合论和抽象代数的一些基本知识，以及这本书中常用的记号.

第二章介绍BCK-代数的一些基本内容，本书中对BCK-代数只作简略介绍。介绍这些内容的目的，一则为读者对BCK-代数理论有个初步的了解，二则为BCI-代数有关理论的展开找出一定的依据，使读者知道来龙去脉。

第三章介绍BCI-代数的概念及主要性质，阐明BCI-代数和BCK-代数的关系，初步研究BCI-代数的BCK-部分，引入一簇BCI-代数的乘积BCI-代数，以及子代数，且介绍理想和商代数.

第四章到第六章其实是BCI-代数理论中的几个专题。第四

章中介绍拟可换的BCI-代数、BCI-代数簇和具有条件(S)的BCI-代数等．这些内容都可供有兴趣的读者进行进一步的研究。

第五章介绍BCI-代数理论中具有成果较丰富的结合BCI-代数。我们既介绍结合BCI-代数的概念和性质，也介绍结合BCI-代数的发展——广义结合BCI-代数。

第六章中研究BCI-拓扑代数。研究具有拓扑结构的BCI-代数，这就产生了BCI-拓扑代数。本章中还简介了有关拓扑学及拓扑群的准备知识。

第七章介绍作者引入的BCH-代数。BCH-代数理论是BCI-代数理论进一步发展的产物。作者和李新在〔38〕中证明了真BCH-代数的存在性，这就表明BCH-代数是一个新的独立的代数结构．我们在这一章中分四节介绍BCH-代数的概念、真BCH-代数的存在、BCH-代数的性质和BCH-代数的同构。这一代数结构是作者在一九八一年提出来的，时间还不长。作为一个代数理论尚还很不完整。作者欢迎有兴趣的读者投入这一代数理论的工作。

作者在最后一章就BCK-代数、BCI-代数和BCH-代数的进一步发展谈点不成熟的看法，其目的在于，一则为使这本书有个较完整的结束，二则为有兴趣的读者提供点参考意见。

2．读本书方法的建议

作者认为，有时间和耐心的读者，不妨从头到尾地阅读。这里介绍的BCI-代数理论是个新的代数分支，远远还谈不上完备，许多结果及方法都是很初等的。作者相信，有兴趣的数学工作者和大学数学系的高年级学生在阅读这本书时不会有多大困难。从事物理、化学和电子计算机理论研究的工作者也可阅读本书。

对于只想了解BCI-代数理论概况的读者，则只要阅读第二、

三、五章就可以了。对于熟悉BCK-代数理论的读者，则只要阅读第三、五章便可了解BCI-代数理论了。

对于初步接触BCK-代数和BCI-代数理论、又想在这一方面做些工作的读者，作者认为，可以先读二、三两章，然后根据自己的兴趣在四至七章中挑选合适的专题仔细研究。

3. 关于参考文献的说明

这本书的后面附有较为详细的参考文献。〔1—3及48〕是关于集合论的四本书，〔4—9〕是有关抽象代数学的书籍和一些专题论述，〔10—12〕是有关点集拓扑学的书。这本书中所用的集合论、抽象代数和点集拓扑学方面的知识请读者参考这些书。

〔13—16，19〕是BCK-代数和BCI-代数理论的一些综合报告。〔17—18〕是K. Iséki等引入BCK-代数和BCI-代数的原始文献。

〔20—47〕是有关BCK-代数、BCI-代数和BCH-代数的文献，其中主要列入BCI-代数的文献。目前BCK-代数理论的文献已非常多，这里不一一列入；所引的〔45—47〕一则为中国作者在BCK-代数方面做的工作，二则也是在我们这本书第二章中要有所提到的。

4. 学习本书的方法

怎样学习这本书？怎样学习BCI-代数理论？怎样能很快投入BCI-代数的研究工作？这是初次接触BCI-代数理论的读者往往会提出的问题。作者认为必须很好地解决学习方法问题，才能真正解决这些问题。作者在这里向读者提出下列方法，以供学习中参考。

第一，科学、严谨，克服神秘。读者们，尤其是初次接触科研论文的读者，既要在学习中采取科学、严谨的态度，又要克服

神秘的思想。只要钻进去，不怕困难，勤于思索，科学之路是一定可以登攀的。

第二，抓住主流，掌握实质。在学习中要注意掌握每一个概念和每一个结果的实质，要尽量自己去推证每一个结果，下得这样的功夫，才会出现"功夫不负有心人"的结果。在科研中还要常常去考虑主攻方向和主流的问题。当然，对初学者也不要轻易放弃那些简单的问题，不要轻视做"小工作"。实际上，要从量变达到质变，必须老老实实地、一步一个脚印地向前走。

第三，一边学习，一边科研。学习BCI-代数理论完全可以采取"一边学习，一边科研"的办法。并不必等到一本书读完后再考虑做工作。读者在接触一些专题后，如有兴趣，便可直接去读有关文献，然后去发现和提出问题，进一步自己去解决这些问题。这本身就是科研的过程。当然，必要的基本理论学习自然是不可少的，相信读者也是不会马马虎虎的。

还有几件事要在这里说明一下。

1）除第二章中没有注明K．Iséki等人的结果和引入的概念外，其他作者引入的概念和得到的结果皆一一注明，而K．Iséki在BCI-代数方面的工作自第三章起已一一注明。

2）凡作者引入的概念及所得到的结果皆冠上〔注××〕。读者可查看本书后面的《注记》的同数目条款。

这里还应当再说一点，就是象这样的一本书，国内还是第一次出现；写得也很仓促，选材也相当有限，有许多文献还看不到，因此这本书中缺点和错误一定不少。作者欢迎读者批评指正，或提出进一步修改的意见。

§3 关于集合论和抽象代数的一些基本知识

BCK-代数和BCI-代数理论的准备知识是不太多的，只要求有一些集合论、抽象代数和点集拓扑学的知识；而这些知识都是一般数学系高年级学生所具备的。为了完整和方便起见，我们在这里列出一些集合论和抽象代数的常用概念和结果，而在第六章的§1中列出有关拓扑学及拓扑群的准备知识，而后者也仅仅用于第六章。

1. 集合论中的概念

我们认为读者对朴素集合论中的一些基本概念和结果是熟知的，例如：集合，元素，属于，有限集，子集，包含，真子集，空集，并集，交集，补集，或余集，差集，对称差，集族，指标集；

序对，笛卡尔积（或直积），坐标，集列，极限集，单调集列；

关系，图象，对角线，定义域，值域，逆关系，关系的复合，象，原象，纤维（一点的原象），等价关系，等价类，商集；

半序集，上界，下界，最大元，最小元，极大元，极小元，全序集，全序子集，区间，截段，稠密，序完备；

映射，图象，射影，特征函数，满射，单射，双射，逆映射，包含映射，（嵌入映射），限制，扩张，映射的乘积；

良序集，序型，序数，基数：选择公理及其等价命题。

上述这些集合论中的概念在一般的集合论的书中均可查到，例如文献〔1—3〕。对于这些概念，我们这本书中一般直接应用，而不再定义或说明。

2．群论中的概念

定义 1.3.1 一个群（G，·）是由集合G及G里的一个二元运算．所组成的一个代数系，且适合下列各条件：

1° $(ab)c=a(bc)$。

2° G里存在一个元素e，使$ae=a=ea$。

3° 对于G里的每个a，在G里存在一个元素a^{-1}，使$aa^{-1}=e=a^{-1}a$。

读者应当熟悉子群、真子群、群的同态和同构等概念。

定义 1.3.2 一个群（G，·）中的元素若满足

4° $ab=ba$，

称(G，·)为交换群或Abel群。

定义 1.3.3 若群（G，·）中的元素a满足

5° $a^2=a\cdot a=e$，

则称a为G的一个对合．如果群(G，·)中的每个元素皆为对合，则称G为一个对合群。

例 1.3.4 设$G=\{0, a\}$，G中的二元运算．由下表给出：

*	0	a
0	0	a
a	a	0

则(G，*)是一个对合群。

易知有下列事实：

定理 1．3．5 对合群皆是交换群。

证 设(G，·)是任一对合群．对于G中的任意元素a，b，则$a\cdot b\in G$，且是G中的一个对合；设e是G的恒等元素，则

$(ab)^2=e$，即有$(ab)(ab)=e$. 由于群满足结合律1°，故有$a(ba)b=e$. 给此等式两边左乘a，右乘b，由于$a^2=e, b^2=e$，故有$ba=ab$.　　　　Q.E.D.

定理1.3.5的逆不真，可见下列：

例 1.3.6　设R是一切实数之集，+是实数中的加法运算，则(R，+)是一个交换群，0是这个群的恒等元素，但是(R，+)不是对合群，如

$$1+1=2\neq 0.$$

我们认为读者熟悉群的不变子群、商群等概念，以及群的同态基本定理，有关群论的一些概念及结果可参看一般的抽象代数书。如〔5，6〕。

3. 环论中的概念

定义 1.3.7　一个环(X，+，·)是一个集合X及X里叫做加法与乘法的两个二元合成组织而成，使

6°　(X，+)是一个交换群。

7°　乘法满足结合律 $a(bc)=(ab)c$.

8°　满足乘法对加法的分配律：

$$a(b+c)=ab+ac,\quad (b+c)a=ba+ca.$$

读者应当知道环的各种类型、子环等概念。

定义 1.3.8　设A为环(X，+，·)的一个子集，如果：

9°　(A，+)是加法群(X，+)的一个子群。

10°　对于一切$x\in X$和任意的$a\in A$，有

$$ax\in A\quad,\quad xa\in A.$$

则称A为环X的一个理想。

读者应当知道X关于理想A的商环、环的同态基本定理等概念和结果。有关环论的知识，读者可参看〔5，6〕。关于根的有

关知识，我们将在第四章§4中作简要介绍，这些知识也仅在那里提到，愿意了解和钻研“环的根”的读者可参看〔9〕。

4．格论中的概念

我们在这里对格论略作介绍。想要较详细地了解格论的读者可参看〔3，6，7〕。为了方便起见，我们仍从半序集谈起。

定义 1.3.9 半序集(S，≤)是由一个集合S及一个关系≤（“小或等于)构成的一个代数系，适合下面的公理：

11° $a\leqslant b$，$b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c$。（称为“传递性”。）

定义 1.3.10 设(S，≤)为半序集，A⊆S，若存在$a\in S$，使对于任意的$x\in A$有$x\leqslant a$，称a为A的上界。类似地可定义A的下界。

定义 1.3.11 在A的上界集中若有最小元，称为A的最小上界或上确界，记为supA。相应地可定义下确界或最大下界，记为infA。

定义 1.3.12 半序集(S，≤)若满足

12° 反对称性：$a\leqslant b$，$b\leqslant a\Rightarrow a=b$，

13° 可比性：若$a\neq b$，则$a<b$或$b<a$，

则(S，≤)称为全序集或线性序集。

定义 1.3.13 在半序集(A，≤)中，若对任意元素x，$y\in A$，$\inf\{x，y\}\equiv x\wedge y$，$\sup\{x，y\}\equiv x\vee y$恒存在时，称(A，≤)为格。

例 1.3.14 全序集一定是格。

例 1.3.15 设X是任一集合。P(X)表示它的幂集（X的一切子集作成的集合），(P(X)，⊂)未必是全序集，但它是一个格，且$A\wedge B=A\cap B$，$A\vee B=A\cup B$。

例 1.3.16 设（X，≤）是一个格，在X中建立另一个

序：

$$a \preceq b \quad iff \quad b \leqslant a,$$

则（X，$\preceq$）仍是一个格，称为（X，$\leqslant$）的对偶格，且

$$a \wedge_{\preceq} b = a \vee b, \quad a \vee_{\preceq} b = a \wedge b。$$

例 1.3.17 设$\mathscr{T}$为由集合A到实数集R的函数全体的集合，对于f、$g \in \mathscr{T}$，当$x \in A$，恒有$f(x) \leqslant g(x)$时，规定为$f \leqslant g$。则"$\leqslant$"为$\mathscr{T}$上的序关系，而($\mathscr{T}$，$\leqslant$)构成格，且

$$(f \wedge g)x = \min\{f(x),\ g(x)\},$$

$$(f \vee g)x = \max\{f(x),\ g(x)\}。$$

定理 1.3.18 格中下述性质成立：

（1）幂等律：$x \wedge x = x$，

（2）交换律：$x \wedge y = y \wedge x$，

（3）结合律：$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$，

（4）吸收律：$x \wedge (x \vee y) = x$。

证（1）和（2）是显然的。

证（3） 设$u = (x \wedge y) \wedge z$，由定义$u \leqslant x \wedge y$，且$u \leqslant z$，从而$u \leqslant x$，且$u \leqslant y$，同时$u \leqslant z$。因$u \leqslant y$，同时$u \leqslant z$，故$u \leqslant y \wedge z$。于是有$u \leqslant x \wedge (y \wedge z)$，即$u$为$\{x, y \wedge z\}$的一个下界。设$\omega$为$\{x, y \wedge z\}$的任意下界，于是$\omega \leqslant x$，且$\omega \leqslant y \wedge z$，从而$\omega \leqslant y$，且$\omega \leqslant z$。由$\omega \leqslant x$和$\omega \leqslant y$有$\omega \leqslant x \wedge y$，由这和$\omega \leqslant z$，则$\omega$是$\{x \wedge y, z\}$的一个下界，但$u = (x \wedge y) \wedge z$，故$\omega \leqslant u$，于是$u$是$\{x,\ y \wedge z\}$的下确界，即(3)成立。

证（4） 由$x \leqslant x$，且$x \leqslant x \vee y$，故x为$\{x,\ x \vee y\}$的一个下界设z为$\{x,\ x \vee y\}$的任意下界，由定义，显然有$z \leqslant x$，从而x是$\{x,\ x \vee y\}$的下确界。故得（4）。　　　　Q·E·D·

定理 1.3.19 格中下述性质成立：

（1）幂等律：$x \vee x = x$，

（2）交换律：$x \vee y = y \vee x$，

（3）结合律：$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$，

（4）吸收律：$x \vee (x \wedge y) = x$。

证 由$\vee$和$\wedge$的对偶性，由定理1．3．18即知。(cf．例1．3．16．) Q·E·D·

由此可见，当有序集(A，$\leqslant$)是格时，恒可确定$x \wedge y$及$x \vee y$，且定理1．3．18和定理1．3．19成立。这一事实启示我们给出格以另外的定义，即有下列：

定义 1.3.20 在非空集A中，定义的运算$\wedge$，$\vee$，若满足定理1．3．18和定理1．3．19的四个性质，则称(A，$\wedge$，$\vee$)为格。

这两个格的定义有什么关系呢？下列定理给以回答。

定理 1.3.21 定义1．3．13中给出格的定义和定义1．3．20中给出的格的定义是等价的。

证 上面我们已证了“定义1．3．13⇒定义1．3．20”．下面证充分性。

1）先证：命

$$x \leqslant y \quad \text{iff} \, x \wedge y = x,$$

则（X，$\leqslant$）是一个半序集。

实际上，设$x \leqslant y, y \leqslant z$。则$x = x \wedge y, y = y \wedge z$。由结合律有$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$。于是，$x = x \wedge y = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge z$ 故 $x \leqslant z$。

2）再证：$x \wedge y = \inf\{x, y\}$，$x \vee y = \sup\{x, y\}$。因

$$(x \wedge y) \wedge x = x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y,$$

故由$\leqslant$的定义有$x \wedge y \leqslant x$，同样有$x \wedge y \leqslant y$。故$x \wedge y$是$\{x, y\}$

的一个下界。设z为$\{x, y\}$的任意一个下界，即 $z\leqslant x$, $z\leqslant y$, 由$\leqslant$的定义知 $z=z\wedge x$, $z=z\wedge y$。代入则得 $z=(z\wedge x)\wedge y$。由结合律有 $z=z\wedge(x\wedge y)$。故有 $z\leqslant(x\wedge y)$，即 $x\wedge y$ 为$\{x, y\}$ 的下确界，亦即 $x\wedge y=\inf\{x, y\}$。

若 $x\leqslant y$，则 $x=x\wedge y$，由定理1.3.19的(4)有

$$y=y\vee(y\wedge x)=y\vee(x\wedge y)=y\vee x=x\vee y,$$

即$x\vee y=\sup\{x, y\}$。　　　　　　　　Q·E·D·

我们再给出关于格的几个定义。

定义 1.3.22　设 $(X, \wedge, \vee)$ 是一个格，如果 X 的势 $\overline{\overline{X}}$或($|X|$)是有限基数时，称它为有限格。

定理 1.3.23　设 $(X, \wedge, \vee)$ 是一个格，$A\subseteq X$，且

$$\forall a, b\in A\Rightarrow a\wedge b\in A, a\vee b\in A,$$

则$(A, \wedge, \vee)$是一个格，称为格 $(X, \wedge, \vee)$ 的子格。

Q·E·D·

最后，我们给出上半格和下半格的定义。

定义 1.3.24　在半序集 $(X, \leqslant)$ 中，如果对于任意的元素x, $y\in X$,

$$x\vee y=\sup\{x, y\}$$

恒存在时，则称为上半格：若

$$x\wedge y=\inf\{x, y\}$$

恒存在时，则称为下半格。

显然，有下列：

定理 **1.3.25**　一个半序集$(X, \leqslant)$是一个格的充要条件是它既是一个上半格，又是一个下半格。　　　Q·E·D·

§ 4 记　号

本书中经常采用下列记号：

1. 取自集合论中的记号

$a \in A$，表示 a 是 A 的元素。

$A \subseteq B$，表示A是B的子集。

$P(A)$，表示A的幂集，或A的子集全体作成的集合。

ϕ，表示空集。

$A \cap B$，表示A与B的交集。

$A \cup B$，表示A与B的并集。

$A \subset B$，表示A是B的真子集。

CA，表示A的余集。

$A \triangle B$，表示A与B的对称差，即集合$(A-B) \cup (B-A)$。

(a, b)，表示二元序对。

(a, b, c)，表示三元序对。

$A \times B$，表示A与B的笛卡尔积，即$\{(a, b):$ $a \in A$且$b \in B\}$。

$D(f)$，表示映射f的定义域。

$R(f)$，表示映射f的值域。

fg，表示映射g与映射f的合成，即$f \circ g$。

f^{-1}，表示逆映射。

$f|A$，表示映射f在A上的限制。

$|A| = \overline{\overline{A}}$，表示集合A的势或基数。

$[a, b]$，表示 $a \leqslant x \leqslant b$，称为闭区间。类似地有开区间等。

2. 取自代数学中的符号

群$(G, \cdot)$,	表示集合G以·为运算作成一个群。
群$(G, \cdot, e)$,	表示e是群G的一个恒等元。
a^{-1}, $a \in G$,	表示a的逆元素。
a^2,	表示$a \cdot a$,
环$(G, +, \cdot)$,	表示集合G以+,·为运算作成一个环。
环$(G, +, \cdot, 0, 1)$,	表示0是零元，1是单位元。
半序集$(S, \leqslant)$,	表示集合S具有关系≤作成一个半序集。
$\inf A$,	表示集合A的下确界。
$\sup A$,	表示集合A的上确界。
格$(A, \wedge, \vee)$,	表示集合A具有运算∧及∨作为一个格。
格$(A, \leqslant)$,	表示集合A具有关系≤作成一个 格。
上半格$(A, \vee)$,	表示集合A具有运算∨作成一个上半格。
下半格$(A, \wedge)$,	表示集合A具有运算∧作成一个下半格。

3. 取自拓扑学的记号

空间X,	表示拓扑空间X。
空间$(X, \mathscr{T})$,	表示集合X以$\mathscr{T}$为拓扑作成一个拓扑空间。
$\mathscr{T} \leqslant \mathscr{S}$,或$\mathscr{T} \leqslant \mathscr{S}$,	表示同一集合上两个拓扑$\mathscr{T}$和$\mathscr{S}$，且$\mathscr{T}$粗于$\mathscr{S}$。
$(X, \mathscr{T}) \times (Y, \mathscr{S})$,	表示拓扑空间$(X, \mathscr{T})$与$(Y, \mathscr{S})$的乘积空间，简记为$X \times Y$。
T_i, $0 \leqslant i \leqslant 6$,	表示分离性。
C_i, $i = 1, 2$,	表示可数性。
拓扑群$(X, \cdot, \mathscr{T})$,	表示集X，·为运算，$\mathscr{T}$为拓扑的拓扑群。
$\overline{A}$, A^0,	表示集合A的闭包及内部。

4．逻辑及书面记号

$\Rightarrow$，　　表示蕴涵。

$\Longleftrightarrow$，　　表示等价。

iff，　　表示当且仅当。

“$\Rightarrow$”，　　表示必要性。

“$\Leftarrow$”，　　表示充分性。

$\forall$，　　表示任意。

$\exists$，　　表示存在。

$\neg$，(或/)，　　表示否定。

$\exists$，　　表示唯一存在。

Q．E．D．，　　表示证明完毕或留给读者作习题（如不证明的话）．

cf．，　　表示参看．

cf．Ⅱ．2，　　表示参看第二章第2节．(没有cf．同.)

cf．定理Ⅱ.3.1，　　表示参看第二章第3节的定理1．（没有cf．同．）

定理3.2，　　表示本章第3节的定理2．

5．本书中关于BCK、BCI及BCH-代数引入的记号这里不一一列入，请读者注意定义．

第二章　BCK-代数概要

我们在这一章中简要地介绍BCK-代数理论。BCK-代数理论是很丰富的，已经发表的论文很多，不在这里作一一介绍。我们只根据这本书的需要，对BCK-代数理论作简略的介绍。这个介绍大体上以〔19〕为基础，内容比〔19〕要多。这一章共分十二节，基本上是从定义和性质、几个重要的类型及生成新的BCK-代数三个方面予以叙述。本章中我们也对一些中国作者的工作作简略介绍。

§1　BCK-代数的概念及一些基本性质

我们在这一节中先介绍BCK-代数理论的实际背景、概念及一些基本性质。

1．背景

Y．Imai和K．Iséki引进BCK-代数理论有两个实际背景，一是集合论，二是命题演算。

在集合论中有三个基本运算：并、交和差。如果我们同时考虑并、交和差三个运算，那么作为这些运算和特性的一般化，便可产生Boole代数。如果只考虑并和交两个运算，其一般化的代数，可产生格论。如果只考虑差这一个运算，并将差的某些特性一般化，便产生了BCK-代数。我们可以把这些说法用一个图直观地反映出来。

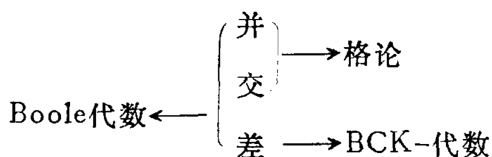


图 2 — 1

格论和Boole代数是人们熟知的（关于Boole代数的概念可参看〔2，3，5或本章§5〕，而BCK-代数正是我们要介绍的。

我们知道，在集论中，差的运算满足下列性质：在P(X)中成立：

1° $(A-B)-(A-C)\subseteq C-B$,

2° $A-(A-B)\subseteq B$,

3° $A\subseteq A$,

4° $\phi\subseteq A$,

5° $A\subseteq B,\ B\subseteq A\Rightarrow A=B$,

6° $A\subseteq B\Longleftrightarrow A-B=\phi$.

上述六个性质中3°，4°,5°是由“⊆”的定义知道的，而1°，2°，6°是不难推得的。

我们再来看命题演算(cf.〔2〕)．设在集论语言中，p，q，r为命题，F表示恒错的命题，则成立下列各式：

1° $[(p\to q)\to(p\to r)]\to(r\to q)$,

2° $[p\to(p\to q)]\to q$,

3° $p\to p$,

4° $F\to p$,

5° $(p\to q)\wedge(q\to p)\to p\equiv q$.

这里（仅在这里）“→”表示“蕴涵”，“∧”表示“且”，“≡”表示“等价”．

我们容易看出，上述两组性质是非常相似的．把这些性质抽

象出来，便产生了BCK-代数。

2．BCK-代数的定义及例子

1966年，Y．Imai和K．Iséki在〔17〕中引入了BCK-代数，即有下列：

定义1 设X是一个具有二元运算$*$及一个常元0的集合．如果它满足：

（Ⅰ）$(x*y)*(x*z)\leqslant z*y$,

（Ⅱ）$x*(x*y)\leqslant y$,

（Ⅲ）$x\leqslant x$,

（Ⅳ）$0\leqslant x$,

（Ⅴ）$x\leqslant y,\ y\leqslant x\Rightarrow x=y$,

（Ⅵ）$x\leqslant y\Longleftrightarrow x*y=0$,

则称它为一个BCK-代数，简记为BCK-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$，且称X为它的基础集．

由于（Ⅵ），公式（Ⅰ－Ⅴ）也可改写为：

$$[(x*y)*(x*z)]*(z*y)=0, \tag{1}$$

$$[x*(x*y)]*y=0, \tag{2}$$

$$x*x=0, \tag{3}$$

$$0*x=0, \tag{4}$$

$$x*y=y*x=0\Rightarrow x=y. \tag{5}$$

为方便起见，改记（Ⅵ）为：

$$x*y=0\Longleftrightarrow x\leqslant y. \tag{6}$$

以后我们常把BCK-代数的这六条公理简称为公理K-i，$i=1,2,3,4,5,6$，有时甚至简称为K-i，$i=1,2,3,4,5,6$．

我们来看BCK-代数的几个例子．

例1　设X是任一集合，P(X)是它的幂集，“－”是集合的差运算，ϕ是空集，有〈P(X)：－，ϕ〉是一个BCK-代数。

例2　设X＝{0}，X中的运算∗定义为：

$$*:\ 0*0=0.$$

则〈X：∗，0〉是一个BCK-代数，称为平凡的BCK-代数。

例3　设X＝{0，1，2，3}，X中的运算∗定义为

∗	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	1	0	2
3	3	0	0	0

，

则〈X；∗，0〉是一个BCK-代数。

例4　设X＝{0，1，2，……，n，……}，X中的运算∗定义为：

$$x*y=\begin{cases}0, & \text{若 } x\leqslant y,\\ x-y, & \text{若 } y<x,\end{cases}$$

则〈X；∗，0〉是一个BCK-代数。

例5　设X＝{0，1，2，……，n，……}，X中的运算∗定义为：

$$x*y=\begin{cases}0, & \text{若 } x\leqslant y,\\ 1, & \text{若 } y<x, \text{ 且 } y\neq 0,\\ x, & \text{若 } y<x, \text{ 且 } y=0,\end{cases}$$

则〈X；∗，0〉是一个BCK-代数。

3．BCK-代数类

在研究BCK-代数理论时，除了要知道BCK-代数的概念、

产生的背景外，首先要弄清我们研究的对象。自然地，我们研究BCK-代数理论其研究对象是一切BCK-代数。这里就会出现几个很自然的问题，即下列：

问题1 一切BCK-代数作成一个集合，还是一个真类？这是一个真类问题。〔注1.见本书后的注记中的第1条，下同。〕

这里，一个真类是一个类，而非集合(见〔48〕)。我们还可以提出下列：

问题2 对于任意的基数$\gamma>0$，是否存在基数为γ的BCK-代数呢？这是一个基数问题〔注2〕

此外，我们还有下列：

问题3 BCK-代数类是否(2，0)型代数类的一个真子类？为了方便起见，我们把这里所说的两个类分别简记为BCK-类和(2，0)类，显然有下列包含关系（类的包含）：

$$\text{BCK-类}\sqsubseteq(2,\ 0)\text{类}.$$

这个问题是问这个包含式是否真包含。这个问题称之为真子类问题。〔注3〕

这三个问题是BCK-代数类的真类问题、基数问题和真子类问题.对于我们以后要研究的BCK-代数类的每一个子类,也存在类似的真类问题、基数问题及真子类问题，不过有时随研究对象而略有不同。现在，我们来解决关于BCK-代数类的这三个问题。我们先给出下列几个引理：

引理 1 设X是一个半序集，半序关系为≤，X中有最小元0，但是X中任何两个非零元在关系≤下不可比较，定义X中的运算$*$为：

$$x*y=\begin{cases}x, & \text{当 } x\leqslant y\text{不成立时},\\ 0, & \text{当 } x\leqslant y\text{成立时}.\end{cases}\qquad(7)$$

则⟨X；∗，0⟩是一个BCK-代数。

证 易验证⟨X；∗，0⟩是满足K-1—K-5的（K-6不必验证），因此它是一个BCK-代数。 Q·E·D·

引理 2〔注4〕 对于任何非空集合X可构造一个以X为基础集的BCK-代数。

证 因为X是一个非空集合，故可任取$x\in X$，且记之为0。

如果X仅有0这一个元素，即X＝{0}，那么在X中定义运算∗为：0∗0＝0。则容易验证⟨X；∗，0⟩是一个BCK-代数，且以X为基础集合。

一般地，我们在X中先建立一个半序关系≤：对于任意的$x\in X$，命$0\leqslant x$，$x\leqslant x$；对于任意的x，$y\in X$，$x\neq y$，$x\neq 0$，$y\neq 0$，x与y不可比较。易知，(X，≤)是一个半序集。在X中定义二元运算∗同(7)，则由引理1知，⟨X；∗，0⟩是一个BCK-代数。 Q·E·D·

现在，我们有下列：

定理1〔注5〕 对于任意的基数$\gamma>0$，存在基数为γ的一个BCK-代数（即其基础集的基数为γ）。

证 对于任意的基数γ，命X表示由小于γ的一切序数作成的集合，则$\overline{\overline{X}}=\gamma$，故⟨X；∗，0⟩是基数为$\gamma$的一个BCK-代数，这里取序数0为0元，运算∗如(7)定义。Q．E．D．

推论 1 对于任何一个自然数n，存在元素个数为n的一个BCK-代数。 Q·E·D·

定理1给BCK-代数类的基数问题以肯定回答。为了方便起见，我们把定理1证明中构造的基数为γ的BCK-代数⟨X；∗，0⟩记为X_γ。显然，如果基数$\gamma\neq$基数α，那么$X_\gamma\neq X_\alpha$。于是，我们有下列：

推论 2〔注 6〕 一切BCK-代数作成一个真类. Q. E. D.

这就给BCK-代数类的真类问题一个肯定的回答. 定理 1 的证明中提供了一个由已知集合构造BCK-代数的方法. 下列例子给出了 $n=5$ 时按定理 1 证明方法构造的一个BCK-代数. 对于n为其它自然数的情形可类似地构造出来.

例 6 设X={0, 1, 2, 3, 4}, X中的二元运算∗由下表给出:

∗	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1
2	2	2	0	2	2
3	3	3	3	0	3
4	4	4	4	4	0

,

则⟨X; ∗, 0⟩是基数为 5 (对于有限基数情形也称为阶, 如此处为阶是 5) 的BCK-代数.

为了方便起见, 我们给出下列:

定义 2 一切BCK-代数作成的类称为BCK-代数类.

下面的定理对BCK-代数的真子类问题以肯定的回答:

定理 2〔注 7〕 一切(2, 0)型代数作成一个真类, 称为(2, 0)型代数类. BCK-代数类是(2, 0)型代数类的一个真子类.

证 显然, 任一BCK-代数都是(2, 0)型代数, 而由定理 1 的推论 1 知, BCK-代数类是一个真类, 从而(2, 0)型代数类是一个真类. 至于第二个结论成立是由于我们可以找出一个(2, 0)型的代数, 它不是BCK-代数, 这由下列例 7 给出.

Q. E. D.

例 7　设$X=\{0, a\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	a
0	0	a
a	a	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个$(2, 0)$型代数，但它不是一个BCK-代数，因为$0*a=a\neq 0$。

我们在这里作两点说明：

（1）一般地讲，如果X是一个有限的BCK-代数，如果列出运算$*$的表，由于K-4，这个表的第一行应当全是0。

（2）一个$(2, 0)$型代数实际上就是一个广群．因此，定理2实际上说明了BCK-代数类是一切广群作成的类的一个真子类。

4．BCK-代数的一些基本性质

对于BCK-代数，我们有下列性质：（参看〔19〕。）

定理3　在BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$中成立：

1）$x\leqslant y\Rightarrow z*y\leqslant z*x$, $\forall z\in X$。　　（8）

2）$x\leqslant y$, $y\leqslant z\Rightarrow x\leqslant z$。　　（9）

证 1）设$x\leqslant y$。由（I）有

$$(z*y)*(z*x)\leqslant(x*y).$$

因为$x\leqslant y$，故$x*y=0$，从而

$$(z*y)*(z*x)\leqslant 0.$$

由（Ⅳ）有$0\leqslant(z*y)*(z*x)$。再由（Ⅴ）知，

$$(z*y)*(z*x)=0.$$

由（Ⅷ）有 $z*y\leqslant z*x$。

2）设 $x\leqslant y$，$y\leqslant z$，由 $y\leqslant z$，据（8），有

$$x*z\leqslant x*y.$$

由于 $x\leqslant y$，故 $x*y=0$，从而（同1）中那样证明可有）

$$x*z=0,$$

即 $x\leqslant z$。 Q·E·D·

定理4 如果 $\langle X;\ *,\ 0\rangle$ 是一个BCK-代数，则 $\langle X,\ \leqslant\rangle$ 是具有最小元0的一个半序集。

证 由（9）及（Ⅳ）知。 Q·E·D·

下面我们给出BCK-代数的一个重要性质，即有：

定理5 在BCK-代数 $\langle X,\ *,\ 0\rangle$ 中成立

$$(x*y)*z=(x*z)*y, \qquad (10)$$

其中 x，y，z 是X中的任意三个元素。

证 由于（Ⅰ）有

$$(x*y)*(x*z)\leqslant(z*y).$$

由（8），对于任意的 $u\in X$ 有

$$u*(z*y)\leqslant u*((x*y)*(x*z)). \qquad (11)$$

在（11）中用 $x*u$ 代替 x，$x*z$ 代替 z，$((x*u)*(z*u))$ 代替 u，则有

$$(((x*u)*y)*(z*u))*((x*z)*y)$$
$$\leqslant(((x*u)*y)*(z*u))*(((x*u)*y)*((x*u)*(x*z))).$$

再由（11）知，上式的右端等于0，故

$$(((x*u)*y)*(z*u))*((x*z)*y)=0,$$

从而

$$((x*u)*y)*(z*u)\leqslant(x*z)*y. \qquad (12)$$

在（12）中令$u=z$，$z=x*y$，则有

$$((x*z)*y)*((x*y)*z)\leqslant((x*(x*y))*y.$$

由（Ⅱ），此式右端为0，故

$$((x*z)*y)*((x*z)*z)=0,$$

所以，

$$(x*z)*y\leqslant(x*y)*z.$$

将y，z互换，便有$(x*y)*z\leqslant(x*z)*y$。由（Ⅴ）而知(10)。

Q·E·D·

1984年5月西北大学数学系孟杰[49]给上述K. Iséki定理如下一个简单证明：$\forall x, y, z\in X$，由K-2知，$x*(x*z)\leqslant z$。由定理3的1)及2)知，$(x*y)*z\leqslant(x*y)*(x*(x*z))\leqslant(x*z)*y$(据K-1)。互换$y$与$z$又得$(x*z)*y\leqslant(x*y)*z$。由K-5知(10)成立。 Q·E·D·

下面一个定理中我们再给出BCK-代数的几个性质：

定理6 在BCK-代数⟨X；$*$，0⟩中对于任意的x，y，$z\in$ X有

1）$x*y\leqslant z\Rightarrow x*z\leqslant y$。 (13)

2）$x\leqslant y\Rightarrow x*z\leqslant y*z$，及$z*y\leqslant z*x$。 (14)

3）$x*y\leqslant x$。 (15)

4）$x*0=x$。 (16)

证 1）设$x*y\leqslant z$，即

$$(x*y)*z=0.$$

由（10）知，

$$(x*z)*y=0,$$

故$x*z\leqslant y$。

2）设 $x\leqslant y$。 第二式即为（8），只要证第一式。由

（Ⅰ）知

$$(x*z)*(x*y)\leqslant y*z.$$

由（13），从上式知，

$$(x*z)*(y*z)\leqslant x*y.$$

因 $x\leqslant y$，即 $x*y=0$，故

$$(x*z)*(y*z)=0.$$

因此，$(x*z)\leqslant(y*z)$。

3）由（Ⅲ），（Ⅳ）及（Ⅵ）有

$$x*x=0\leqslant y.$$

由（13）有

$$x*y\leqslant x.$$

4）据（15），对于任意的 $x\in X$ 有

$$x*0\leqslant x.$$

另一方面，由（Ⅰ）有

$$x*(x*0)\leqslant 0.$$

故

$$x*(x*0)=0,$$

即

$$x\leqslant x*0.$$

由（Ⅳ）有

$$x*0=x. \qquad \text{Q.E.D.}$$

注意，公式（16）是BCK-代数的一个重要性质。由（16）可知，对于一个有限的BCK-代数〈X；＊，0〉来说，其乘法表中第一列的元素即为X本身的元素依次列出。结合定义中的公理（Ⅲ）及（Ⅳ），我们可以画出：

$*$	0	x	$\cdots\cdots y\cdots\cdots$
0	0	0	$\cdots\cdots 0\cdots\cdots$
x	x	0	
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$
y	y		0
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$

乘法表中尚有两个三角形块则是根据具体情况另行填入的。了解这些情况无疑地对于具体计算及构造例子是非常方便的。

§2 运算∧及可换的BCK-代数

在这一节中我们首先在任意的一个BCK-代数中引进一种运算∧，然后引入一类重要的BCK-代数——可换的BCK-代数。并且讨论这种代数的几个特征性质。

1 运算∧

定义1 ⟨X; $*$, 0⟩是一个BCK-代数。X中的一个二元运算∧定义为：

∧：$x\wedge y=y*(y*x)$。　　　　(1)

运算∧有下列性质：

定理 1 在BCK-代数⟨X; $*$, 0⟩中，对于任意的$x,y\in X$成立：

1）$x\wedge y\leqslant x$，$x\wedge y\leqslant y$。　　　　(2)

2）$x\wedge y$ 是 x 与 y 的一个下界。

3）$x\wedge x=x$。　　　　(3)

4）$x\wedge 0=0\wedge x=0$。　　　　(4)

证 1）由（Ⅱ）知，

$$x\wedge y=[y*(y*x)]\leqslant x.$$

又因

$$y*y=0\leqslant y*x,$$

再由§1中（13）知，

$$x\wedge y=y*(y*x)\leqslant y.$$

2）由（2）知，$x\wedge y$是x与y的一个下界。

3）$x\wedge x=x*(x*x)=x*0=x$，后一等式是由于§1中（16）。

4）$x\wedge 0=0*(0*x)=0$。

$0\wedge x=x*(x*0)=x*x=0$，后二等式分别据§1中的（16）及（3）。　　　Q・E・D・

注 1　定理1的2）指出了，$x\wedge y$是x和y的一个下界，但$x\wedge y$不必为x与y的下确界。

注 2　一般地$x\wedge y$不必等于$y\wedge x$。

例 1　设$X=\{0,a,b,c\}$。X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	a	0	b
c	c	0	0	0

则⟨X；$*$，0⟩是一个BCK-代数。（cf. §1例3.）

我们容易算出：

$$a\wedge c=c*(c*a)=c*0=c,$$

$$c\wedge a=a*(a*c)=a*a=0.$$

即有 $a\wedge c\neq c\wedge a$。

我们从上面乘法表还可以看出一个事实：

$$c*a=0,$$

即 $c<a$。（因 $c\neq a$。）于是，我们有

$$c\wedge a=0<c=\inf\{a,\ c\}<a.$$

这给出了 $c\wedge a$ 与 $\inf\{a,\ c\}$不相等的一个具体例子。

这样，我们有必要研究 $x\wedge y=y\wedge x$ 成立的 BCK-代数。

2。可换的BCK-代数

定义 2 如果BCK-代数$\langle X;\ *, 0\rangle$中对于任意两个元素 x, $y\in X$有

$$x\wedge y=y\wedge x, \tag{5}$$

那么称它是一个可换的BCK-代数。（由K。Isēki引入。）

注 一个 BCK-代数是可换的，是指在其中（5）恒成立，即是关于运算$\wedge$可换的，而不是对于运算$*$可换的。（5）的真实含意是：

$$y*(y*x)=x*(x*y). \tag{5'}$$

（5′）与

$$x*y=y*x \tag{6}$$

是根本不同的。为了区别起见，我们作如下：

定义 3 如果BCK-代数$\langle X;\ *, 0\rangle$中对于任意两个元素 x, $y\in X$有（6）成立，则称它为一个运算（指$*$）交换的BCK-代数。

例 2 设$X=\{0\}$，运算$*$定义为：$0*0=0$.则$\langle X;\ *, 0\rangle$是一个平凡的BCK-代数。显然，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个运算交换的BCK-代数，而且也是一个可换的BCK-代数。

我们在第五章中将得到下列结果：

定理 2[注8] 一个BCK-代数⟨X; $*$, 0⟩是运算交换的，则它一定是平凡的。 Q·E·D·

由上面的例 2 知道，定理 2 的逆是成立的。这样，运算交换的BCK-代数与平凡BCK-代数是等价的。因此。没有必要再研究这类BCK-代数了。因此。我们就考虑关于运算∧的可换性问题。

下面我们再来看几个例子。

例 3 例 1 中给出的 BCK-代数⟨X; $*$, 0⟩不是可换的。说明了存在不可换的BCK-代数。

例 4 设X = {0, 1, 2, ……, n, ……}，X中的二元运算$*$定义为

$$x * y = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \leqslant y, \\ x - y, & \text{若 } y < x. \end{cases}$$

则⟨X; $*$, 0⟩是一个可换的BCK-代数。(cf. § 1 例 4 。)

这个例子说明了存在非平凡的可换的BCK-代数。

3. 可换BCK-代数类

上面的例 2 和例 4 说明了可换BCK-代数是存在的。现在，我们要讨论一下可换BCK-代数类的真类问题、基数问题和真子类问题，即下列：

问题 1 一切可换 BCK-代数作成的类是否一个真类？对于任何的基数 $\gamma > 0$，是否存在基数 γ 的可换的BCK-代数？一切可换的BCK-代数作成的类是否BCK-代数类的一个真子类？

为了方便起见，先给出下列：

定义 4 称一切可换BCK-代数作成的类为可换 BCK-代数类。

为了回答问题1，在这里先给出几个引理。

引理1 设X是具有最小元0的一个半序集，半序关系为≤，其任意两个不同的非零元素不可比较，在X中定义二元运算$*$为：

$$x*y=\begin{cases}x, & \text{当 } x\leqslant y \text{ 不成立时,}\\ 0, & \text{当 } x\leqslant y \text{ 成立时,}\end{cases}$$

则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个可换的BCK-代数。

证 由引理1.1知，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个BCK-代数。现在，我们只要证可换性。设x，y是X的任二元素。

$$x\wedge y=y*(y*x)=\begin{cases}y*0=y, & \text{当 } y\leqslant x,\\ y*y=0, & \text{否则。}\end{cases}$$

同理，有

$$y\wedge x=\begin{cases}x, & \text{当 } x\leqslant y,\\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$$

现在，可分为以下几种情形讨论：

1） 当$x=y$时，则有

$x\wedge y=y=x=y\wedge x$。

2） 当$x<y$时，此时$x=0$，$y\neq 0$，从而

$x\wedge y=0=y\wedge x$。

3）当$y<x$时，此时$y=0$，$x\neq 0$，从而

$x\wedge y=y=0=y\wedge x$。

4）当x与y不可比较时，

$x\wedge y=0=y\wedge x$。

这样，总是成立$x\wedge y=y\wedge x$。因此，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个可换的BCK-代数。 Q.E.D.

由引理 1 和引理1．2 可知成立下列：

引理 2〔注 9〕 对于任何非空集全X可构造一个以X 为基础集的可换的BCK-代数。 Q・E・D・

我们再给出下列：

引理 3 存在不可换的BCK-代数。

证 例 1 就给出了一个不可换的BCK-代数。 Q・E・D・

下面，我们再举一个不可换的BCK-代数的例子。

例 5 设$X=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，X中的运算$*$定义为

$$x * y=\begin{cases}0, & x \leqslant y, \\ 1, & y<x \text{ 且 } y \neq 0 \\ x, & y<x \text{ 且 } y=0 .\end{cases}$$

容易验证$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数．它不是可换的，因为

$$3 \wedge 2=2 *(2 * 3)=2,$$

$$2 \wedge 3=3 *(3 * 2)=3 * 1=1,$$

故$2 \wedge 3 \neq 3 \wedge 2$．

现在，我们对本节的问题 1 作出下列肯定回答，即有：

定理 3〔注10〕 对于任何的基数$\gamma>0$，存在基数γ的一个可换的BCK-代数．从而，可换BCK-代数类是一个真类．可换BCK-代数类是BCK-代数类的一个真子类．

证 设$\gamma>0$是任意的基数．则由定理 1．1 的证明知，$X\gamma$是一个BCK-代数．由引理 1 知，$X\gamma$是可换的．因此，对于$\gamma>0$，存在以γ为基数的可换的BCK-代数．

由此可知，可换BCK-代数类是一个真类．

显然，可换BCK-代数类$\subseteq$BCK-代数类．由引理 3 知，可换BCK-代数类是BCK-代数类的一个真子类． Q・E・D・

4．几个较为复杂的例子

例 6 设m是一个自然数．对于$i=1，2，\cdots\cdots，m$，集合

$$A_i=\{a_{i_0},\ a_{i1},\ \cdots\cdots,\ a_{ij},\ \cdots\cdots\},$$

其中

$$a_{i0}=0<a_{i1}<\cdots\cdots<a_{ij}<\cdots\cdots,$$

且

$$A_i\cap A_j=\{0\},\qquad i\neq j.$$

命$X=\bigcup_{i=1}^{m}A_i$，X 中定义一个二元运算$*$：对于任意的$x,y\in X$，

$$x*y=\begin{cases}0, & x\leqslant y,\\ a_i, & k-l, y<x \text{ 且 } x=a_{ik},\ y=a_{il},\\ x, & \text{否则}.\end{cases}$$

则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个可换的BCK-代数．

例 7 X同例6，X中规定如下一个二元运算#：对于任意的$x,\ y\in X$，

$$x\#y=\begin{cases}0, & x\leqslant y,\\ a_{ij}, y<x, y\neq 0, \text{ 即 } x=a_{ik}, y=a_{il},\\ x, & \text{其余}.\end{cases}$$

则$\langle X;\ \#,\ 0\rangle$是一个不可换的BCK-代数．

例 8 设X是一个非空集合，Y是X上定义的一切实值函数的集合，对于任意的$f,\ g\in Y$，命

$$(f*g)(x)=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant g(x),\\ f(x)-g(x), & g(x)<f(x).\end{cases}$$

则$\langle Y;\ *,\ 0\rangle$是一个可换的BCK-代数，其中0表示零函数．

例 9 设X是一个非空集合，Y是定义在X上的一切非负整数值函数，对于任意的$f,\ g\in Y$，命

$$(f*g)(x)=\begin{cases}0, & f(x)\leqslant g(x),\\ 1, & g(x)<f(x),\ 且\ g(x)\neq 0,\\ f(x), & g(x)<f(x),\ 且\ g(x)=0.\end{cases}$$

则$\langle Y; *, 0\rangle$是一个非可换的BCK-代数。

5．可换BCK-代数的性质

我们在给出可换BCK-代数的一个重要特征之前，先给出两个引理，它们本身也是简单而有意思的性质。

引理4 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，x，y，z是X中的任意三个元素，则有

$$(z\wedge x)*y=(x*y)*(x*z)。\text{[注11]} \qquad (7)$$

证 因

$$(z\wedge x)*y=(x*(x*z))*y=(x*y)*(x*z),$$

后一等式是因定理1．5． Q·E·D·

引理5 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数．x和y是X中的任二元素，且$x\leqslant y$，则

$$y\wedge x=x。 \qquad (8)$$

如果X还是可换的，则

$$x\leqslant y\Rightarrow x=x\wedge y。\text{[注11]} \qquad (9)$$

证 先证第一种情形．因为定理1．6．4）

$$x=x*0． \qquad (10)$$

由于$x\leqslant y$，故$x*y=0$．代入（10）有

$$x=x*(x*y)=y\wedge x,$$

当X可换时，则（据第一种情形）

$$x=y\wedge x=x\wedge y. \qquad Q·E·D·$$

我们有可换BCK-代数的下列特征：

定理4 BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$是可换的当且仅当它是关

于$\wedge$的一个下半格，其中$\wedge$的定义由（1）给出。

证 “$\Leftarrow$”．设$\langle X, \wedge\rangle$是一个下半格．那么$x\wedge y$是x与y的下确界，而$y\wedge x$又是y与x的下确界，因$\inf\{x, y\}=\inf\{y, x\}$，故$x\wedge y=y\wedge x$．由于$x$与$y$是X中的任二元素，所以$\langle X; *, 0\rangle$是一个可换的BCK-代数。

“$\Rightarrow$”．设$\langle X; *, 0\rangle$是一个可换的BCK-代数．设x和y是X中的任二元素．由定理1的2）知，$x\wedge y\leqslant x$，$x\wedge y\leqslant y$，即$x\wedge y$是x和y的一个下界．现证，当X是可换时，$x\wedge y$是x和y的一个下确界，从而$\langle X, \wedge\rangle$是一个下半格．

设z是x和y的一个下界，即$z\leqslant x$，$z\leqslant y$，现欲证$z\leqslant x\wedge y$为此，作下列计算：

$$z*(x\wedge y)=z*(y*(y*x)).$$

由于$z\leqslant y$，且X是可换的，由引理5有

$$z=z\wedge y.$$

因此，

$$\begin{aligned}z*(x\wedge y)&=(z\wedge y)*(y*(y*x))\\&=(y*(y*z))*(y*(y*x)).\end{aligned}$$

由（7）则有

$$z*(x\wedge y)=((y*x)\wedge y)*(y*z).$$

由于X是可换的，故有

$$\begin{aligned}z*(x\wedge y)&=(y\wedge(y*x))*(y*z)\\&=((y*x)*((y*x)*y))*(y*z)\\&=((y*x)*((y*y)*x))*(y*z)\\&=((y*x)*(0*x))*(y*z)\\&=((y*x)*0)*(y*z)\\&=(y*x)*(y*z),\end{aligned}$$

再由引理 4 知，

$$z*(x\wedge y)=(z\wedge y)*x.$$

再由引理 5 知，$z\wedge y=z \quad (z\leq y)$，故有

$$z*(x\wedge y)=z*x=0,$$

因 $z\leq x$。　　　　　　　　　　　　Q.E.D.

下面我们再给出可换的 BCK- 代数的一个特征性质，即有：

定理 5　设 X 是一个集合，它具有一个二元运算$*$，一个二元关系$\leq$和一个常元 0。则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个可换的 BCK-代数当且仅当X满足下列条件：对于 X 中的任意三个元素成立：

1）$(x*y)*z=(x*z)*y$，

2）$x*(x*y)=y*(y*x)$，

3）$x\leqslant x$，

4）$0\leqslant x$，

5）$x\leqslant y,\ y\leqslant x\Rightarrow x=y$，

6）$x\leqslant y,\ y\leqslant z\Rightarrow x\leqslant z$，

7）$x\leqslant y\Longleftrightarrow x*y=0$。

证　"$\Rightarrow$"。这是显然的，因为 3），4），5），7）由 BCK-代数的定义给出。6）由定理 1.3，2）给出，1）由定理 1.5 给出，2）则是可换性条件。

"$\Leftarrow$"。设X满足条件 1）—7），要证$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个可换的BCK-代数，只要证定义 1.1 中公理（Ⅰ）和（Ⅱ）满足即可。

先证公理（Ⅱ）成立。设 x，y，z 是X中任意三个元素，且满足

$$x*y\leqslant z. \tag{11}$$

即

$$(x*y)*z=0.$$

由条件1）有

$$(x*z)*y=0.$$

从而

$$x*z\leqslant y. \tag{12}$$

现在，由于条件3），(11)中可取 $z=x*y$，故由（12）知

$$x*(x*y)\leqslant y.$$

这就得出了公理（Ⅱ）.

再证公理（Ⅰ）成立。我们令

$$x\wedge y=y*(y*x).$$

由条件2）知

$$x\wedge y=y\wedge x.$$

由于上面证过的公理（Ⅱ）有

$$x\wedge y=y*(y*x)\leqslant x. \tag{13}$$

这样，我们据（13）可以算得：（据条件1））

$$\begin{aligned}(x*y)*(x*z)&=(x*(x*z))*y\\&=(z\wedge x)*y.\end{aligned} \tag{14}$$

由于由条件1），3），4）可有

$$\begin{aligned}((z\wedge x)*y)*(z\wedge x)&=((z\wedge x)*(z\wedge x))*y\\&=0*y=0,\end{aligned}$$

由条件7）及（14）可知

$$(x*y)*(x*z)\leqslant z\wedge x.$$

又由（13）知 $z\wedge x\leqslant z$，故据条件6）知

$$(x*y)*(x*z)\leqslant z,$$

或由（14）可有

$$(x*(x*z))*y\leqslant z. \tag{15}$$

再来考察

$$(z*(z*x))*(z*y)=(z*(z*y))*(z*x).$$

据（15）（令 z 换以 y，y 换以 $z*x$）有

$$(z\wedge x)*(z*y)\leqslant y,$$

即

$$((z\wedge x)*(z*y))*y=0,$$

由条件 1）有

$$(z\wedge x)*y\leqslant z*y. \tag{16}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}(x*y)*(x*z)&=(x*(x*z))*y\\&=(z\wedge x)*y\\&\leqslant z*y.\end{aligned}$$

这就证得了公理（I）． Q·E·D·

上面的定理 5 是有名的K·Iséki—S·Tanaka定理．1984年 4 月，西北大学数学系八〇级学生张颐改进了这一定理，得到了下列结果：

定理 6 设⟨X；$*$，0⟩是（2，0）型代数，X上定义了一个二元关系≤：

$$\leqslant:\ x\leqslant y \Longleftrightarrow x*y=0.$$

则⟨X；$*$，0⟩是一个可换的BCK-代数的充要条件是满足：对于X中的任意三个元素 x，y，z 成立定理 5 中的 1），2），3），4），5）．

对比定理 5，这里实际上去掉了条件 6）．

证 “⇒”．同定理 5 证明中的必要性．

“⇐”．同样只要验证K－1和K－2成立．由于定理5的证明中对K－2的验证并不用条件6），故这里完全可以同样地证明K－2成立。

现在只需验证K－1成立．这只要直接算一下即可，注意此时K－2已经成立。

因为1）和2）有

$$
\begin{aligned}
&((x*y)*(x*z))*(z*y)\\
&=((x*(x*z))*y)*(z*y)\\
&=((z*(z*x))*y)*(z*y)\\
&=((z*(z*x))*(z*y))*y\\
&=((z*(z*y))*(z*x))*y\\
&=((z*(z*y))*y)*(z*x)\\
&=0*(z*x)\\
&=0,
\end{aligned}
$$

最后的两步分别用到了K－2，3）及“≤”的定义．这就证得了K－1成立．　　Q·E·D·

6．初始段

在这一节的最后，我们介绍BCK－代数中的一个概念——初始段．这个概念对于研究BCK－代数是经常用到的。

定义5　设〈X；＊，0〉是一个BCK－代数．对于X中的一个任意的元素x，称X的子集

$$A(x)=\{y\in X;\ y\leqslant x\}$$

为元素x的初始段，其中≤是BCK－代数〈X；＊，0〉中的半序。

例10　我们考虑本节的例1．X＝{0，a，b，c}，运算＊由下表给出：

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	a	0	b
c	c	0	0	0

容易看出： $A(0)=\{0\}$，$A(a)=\{0,a,c\}$，

$A(b)=\{0,a,b,c\}=X$，

$A(c)=\{0,c\}$。

易知，初始段具有下列性质：

定理 7〔注12〕 设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCK-代数。则对于任意的 $x\in X$ 有

$$A(x)=\begin{cases}\{0\}, & x=0,\\ \text{至少包含 0 和 } x \text{ 的一个集合}, & x\neq 0.\end{cases}$$

证 当 $x=0$ 时，由于 $0\leqslant 0$，故 $0\in A(0)$。我们断言，$A(0)=\{0\}$。如果存在 $y\in X$，$y\neq 0$，$y\in A(0)$。那么 $y\leqslant 0$。另一方面，由 BCK-代数的定义知，$0\leqslant y$。故 $y=0$，矛盾。

当 $x\neq 0$ 时，由于 $0\leqslant x$，$x\leqslant x$，故 $\{0,x\}\subseteq A(x)$。因此 $A(x)$ 是至少包含 0 和 x 的一个集合。 Q.E.D.

现在，我们要利用初始段再给出可换 BCK-代数的一个特征性质。

定理 8 设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCK-代数。则 X 是可换的当且仅当对于 X 中的一切 x，y 均有

$$A(x)\cap A(y)=A(x\wedge y)。\tag{17}$$

证 "⇒"。设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个可换的 BCK-代数。设 $z\in A(x)\cap A(y)$，则 $z\in A(x)$，$z\in A(y)$，因此

$$z \leqslant x, \quad z \leqslant y.$$

由定理 1 的 2），

$$z \leqslant x \wedge y,$$

故 $z \in A(x \wedge y)$。因此$A(x) \cap A(y) \subseteq A(x \wedge y)$。

另一方面，如果$z \in A(x \wedge y)$，则$z \leqslant x \wedge y$，因此$z \leqslant x$，$z \leqslant y$，故$z \in A(x)$，$z \in A(y)$，从而$z \in A(x) \cap A(y)$。由此可知，

$$A(x \wedge y) \subseteq A(x) \cap A(y).$$

这就证得 $A(x) \cap A(y) = A(x \wedge y)$。

“$\Leftarrow$”. 设（17）成立。则

$$A(x \wedge y) = A(x) \cap A(y) = A(y) \cap A(x) = A(y \wedge x). \tag{18}$$

由（18）可知，

$$x \wedge y \leqslant y \wedge x, \quad y \wedge x \leqslant x \wedge y.$$

由 BCK－代数的定义知，$x \wedge y = y \wedge x$。因此，X 是可换的。

Q·E·D·

由定理 8 的充分性证明我们可以得到一个启示，而得到下列：

定理 9[注13] 设$\langle X; *, 0 \rangle$是一个 BCK－代数，则有

$$A(x) = A(y) \iff x = y. \tag{19}$$

证 “$\Leftarrow$”. 这是显然的。

“$\Rightarrow$”. 设 $A(x) = A(y)$。那么

$$x \leqslant y \quad 且 \quad y \leqslant x.$$

由BCK－代数的定义中的公理K－5 知$x = y$。Q. E. D.

由定理 9 我们进一步可以得到下列：

定理10[注14] 设$\langle X; *, 0 \rangle$是一个BCK－代数。命

$$\mathrm{A} = \{A(x): x \in X\}. \tag{20}$$

则$\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\overline{X}}$。 Q·E·D·

这样，我们对例10中出现的A(0)，A(a)，A(b)，A(c)四个不同子集这一现象通过定理9和定理10就得到了一般结果。

§3 有界BCK-代数及运算∨

我们在§2中介绍了BCK-代数理论中的一个有趣的结果：由定理2.4知道，一个可换的BCK-代数⟨X；$*$，0⟩是关于∧的一个下半格。我们在这一节中，再进一步加点条件，而引进运算∨，使(X；∨)成一个上半格。这样，(X，∧，∨)就是一个格了。我们先从有界BCK-代数谈起，这也是一类重要的BCK-代数。本节中我们还将介绍西大经济学院李丹在这一方面所作的一些结果(cf.〔45〕)。

1．有界BCK-代数的概念

1974年K·Iséki引进了下列概念：

定义1 若BCK-代数⟨X；$*$，0⟩中存在元素1，使对于任意的$x\in Y$有$x\leqslant 1$，则称⟨X；$*$，0⟩是有界的BCK-代数，而1被称为X的一个单位元。

我们来看几个例子。

例1 平凡的BCK-代数显然是有界的。

例2 设X是任一集合，则⟨P(X)；—，ϕ⟩是一个有界的BCK-代数，其中X本身是这个代数的单位元素。

例3 设X＝{0，a，b}，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	a	b
0	0	0	0
a	a	0	0
b	b	b	0

则〈X；$*$，0〉是一个有界的BCK-代数，而b是它的单位元素。

由例3可以得到一个启示：如果〈X；$*$，0〉是一个有限的BCK-代数，而运算$*$由一个乘法表给出时，那么一个元素$x\in X$是X的单位元素的充要条件是x所在的列（乘法表中）皆是零。由定义1易知下列：

定理1〔注15〕 设1是有界BCK-代数〈X；$*$，0〉的一个单位元，则

$$A(I)=X。$$

反之，如果BCK-代数〈X；$*$，0〉中元素$x\in X$满足$A(x)=X$，则x是它的单位元，因而X是有界的。

证 1）设〈X；$*$，0〉是一个有界的BCK-代数，1是它的单位元，则对于任意的$x\in X$，有$x\leqslant 1$。故$x\in A(1)$。因此$A(1)=X$。

2）如果〈X；$*$，0〉是一个BCK-代数，$x\in X$，$A(x)=X$，则对于任意的$y\in X$，$y\in A(x)$，即$y\leqslant x$。故x是X的单位元，从而X是有界的。　　　　Q·E·D·

我们还有下列结果：

定理2 设BCK-代数〈X；$*$，0〉有单位元，则单位元唯一。

证 由定理1及定理2.9即知。Q·E·D·（注。可由公理（Ⅴ）直接证。）

注 一个BCK-代数〈X；$*$，0〉有单位元1，即就是在半序集$(X,\leqslant)$中有最大元1。另外，读者不要认为一切BCK-代数都是有界的，存在无界的BCK-代数，可见下面例4。此外，有界和可换是两个不同的概念，下面的例5将给出一个有界

而不可换的BCK-代数的例子，例 6 则给出一个可换而无界的BCK-代数的例子。

例 4 $X=\{0, a, b, c\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	a	0	b
c	c	c	c	0

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个无界的 BCK-代数. 它的无界性易从定理 1 前的注记而知。

这也是一个有限的BCK-代数,这说明了有限的BCK-代数不必是有界的。这个例子是李丹〔45〕中给出的. 由例 1 — 4 可知,

$$\phi \neq \text{有界BCK-代数类} \subset \text{BCK-代数类}.$$

由例 4 知，后一包含是真包含。这实际上肯定回答了真子类问题。

例 5 设$X=\{0, 1, \cdots\cdots, \omega\}$，其中$\omega$表示最小的可数序数。X中定义运算$*$如下地给出：对于X中的任二元素$x$和$y$,

$$x*y=\begin{cases} 0, & x\leqslant y\leqslant\omega, \\ 1, & y<x<\omega,\ y\neq 0, \\ \omega, & y<x=\omega,\ y\neq 0, \\ x, & y<x\leqslant\omega,\ y=0. \end{cases}$$

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个具有单位元ω的有界 BCK-代数，但它不是可换的，因为

$$\omega\wedge 1=1*(1*\omega)=1*0=1,$$

$$1\wedge\omega=\omega*(\omega*1)=\omega*\omega=0.$$

例 6 如例 2.4 那样，设 $X=\{0, 1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots\}$.

X 中的二元运算为

$$x*y=\begin{cases}0\ , & x\leqslant y,\\ x-y, & y<x.\end{cases}$$

例2.4已指出，〈X; *, 0〉是一个可换的 BCK-代数。现在我们要指出，X 是无界的。事实上，如果 n 是X的一个单位元，则 $n\neq 0$，且

$$(n+1)*n=1\neq 0,$$

这是一个矛盾。

这是一个基数为 $\aleph_0$ 的无界 BCK-代数的例子。

有界 BCK-代数还有下列简单性质：

定理 3 设 1 是有界 BCK-代数〈X; *, 0〉的单位元，则

$$\forall x\in X,\ 1\wedge x=x. \qquad (1)$$

证 事实上，我们根据定义 1 可以算出：

$$1\wedge x=x*(x*1)=x*0=x,$$

后一等式是由于定理1.6的 4）． Q·E·D·

2．一点有界化

我们在这里要介绍一个方法，使一个非有界的 BCK-代数，加上一点，而构成一个新的有界BCK-代数。这个方法我们称之为"一点有界化"．下列定理给出这个方法：

定理 4 设〈X; *, 0〉是一个 BCK-代数，但不是有界的。任取 $a\overline{\in}X$，命

$$X'=X\cup\{a\},$$

$$*_1: x*_1 y=\begin{cases}x*y, & x,y\in X,\\ 0\ , & x\in X,\ y=a,\\ a, & x=a,\ y\in X\\ 0\ , & x=a,\ y=a.\end{cases}$$

则 $\langle X'; *_1, 0\rangle$ 是一个有界的 BCK-代数。

证 容易验证 $\langle X'; *, 0\rangle$ 是一个 BCK-代数，此处从略。由于对于任意的 $x\in X'$ 有 $x*_1 a=0$，故 $\langle X'; *_1, 0\rangle$ 是以a为单位元的有界BCK-代数。 Q·E·D·

我们来看两个例子。

例 7 例 4 中的 BCK-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 是无界的。它的一点有界化 $\langle X'; *_1, 0\rangle$ 是这样给出的：$X'=\{0, a, b, c, d\}$，其中的二元运算$*_1$由下表给出

$*_1$	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	a	0
b	b	a	0	b	0
c	c	c	c	0	0
d	d	d	d	d	0

例 8 例 6 中的 BCK-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 是无界的。它的一点有界化 $\langle X'; *_1, 0\rangle$ 是如下地给出的：$X'=X\cup\{a\}=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots, a\}$，其中$\bar{a}\in X$，而 X' 中的二元运算 $*_1$由下表给出：

$*_1$	0	1	2	…	n	…	a
0	0	0	0	…	0	…	0
1	1	0	0	…	0	…	0
2	2	1	0	…	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…
n	n	$n-1$	$n-2$	…	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…
a	a	a	a	…	a	…	0

注 1 从乘法表来看，一个非有界的 BCK-代数 $\langle X; *,$

0〉的一点有界化〈X′；$*_1$，0〉的乘法表正是〈X；$*$，0〉的乘法表的最右边贴了一列0，且在下面贴了一行a（除了$a*_1a$ = 0）。

注2 定理4中给出的一点有界化的方法，是K. Isēki提出来的。但是，不难验证，如果〈X；$*$，0〉是有界的BCK-代数，且1是它的单位元，我们仍取$a\overline{\in}X$，命$X'=X\cup\{a\}$，而运算$*_1$同定理4，那么〈X′；$*_1$，0〉还是一个有界的BCK-代数，但是X′中的单位元是a，而不是1了。因此，我们可以推广K. Isēki的这个结果，而得到下列结果：

定理5〔注16〕 设〈X；$*$，0〉是任意的一个BCK-代数，$a\overline{\in}X$，命$X'=X\cup\{a\}$，$*_1$同定理4那样定义，那么〈X′；$*_1$，0〉是一个以a为单位元的有界BCK-代数，称为〈X；$*$，0〉的一点有界化。 Q·E·D·

我们再来看一个例子。

例9 我们知道平凡的BCK-代数是有界的，我们记为X_0，其运算表可写为

$*$	0
0	0

我们记X_0的一点有界化为X_1，其乘法表为：

$*_1$	0	1
0	0	0
1	1	0

这也是我们熟悉的一个BCK-代数。X_1的一点有界化为X_2，其乘法表为：

$*_2$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	2	0.

我们可以继续写出X_2的一点有界化X_3的乘法表

$*_3$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	2	0	0
3	3	3	3	0.

当然，我们可以写出 X_{n-1}的一点有界化Xn的乘法表：

$*_n$	0	1	2	3	…	$n-1$	n
0	0	0	0	0	…	0	0
1	1	0	0	0	…	0	0
2	2	2	0	0	…	0	0
3	3	3	3	0	…	0	0
…	…	…	…	…	…	…	…
$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	…	0	0
n	n	n	n	n	…	n	0.

这样，对于每个正整数n我们可以构造一个阶为n的有界 BCK-代数。因此，我们有下列：

定理 6〔注17〕 对于每个$n \in N$（N 表示自然数集，下同），存在阶为n的有界BCK-代数。因此存在无穷多个有界 BCK-代数。 Q.E.D.

这个结果指出了有穷多个有界 BCK-代数，但是还不足以回答有界 BCK-代数类的真类问题和基数问题（例 4 后的注记中已

肯定地回答了真子类问题）。因此，我们还需要进一步讨论有界BCK-代数类。

3．有界BCK-代数类

有界BCK-代数类的真类问题和基数问题是：有界BCI-代数类是否一个真类？对于任何的基数$\gamma>0$，是否存在基数γ的有界BCK-代数？

为了回答这个问题，我们先给出下列：

引理1〔注18〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是基数γ为无限的BCK-代数，则它的一点有界化$\langle X'; *_1 0\rangle$是基数为γ的有界BCK-代数。

证 因$|X'|=\gamma+1=\gamma=|X|$，且X'是有界的。因此，$\langle X'; *, 0\rangle$是基数为γ的有界BCK-代数。 Q·E·D·

引理2〔注19〕 对任意的无限基数γ存在一个基数为γ的有界BCK-代数。

证 由定理1.1知，对于任意的无限基数γ存在基数为γ的一个BCK-代数（而且我们可具体构造一个），再由引理1知，存在一个基数为γ的有界BCK-代数。 Q·E·D·

现在，我们可以对有界BCK-代数类的基数问题和真类问题作如下肯定回答：

定理7〔注20〕 对于任意的基数$\gamma>0$存在基数γ的有界BCK-代数。从而，有界BCK-代数类是一个真类。

证 当$\gamma>0$为有限基数即自然数时，由定理6知结论成立；当γ为无限基数时，由引理2结论成立。 Q·E·D·

为了进一步讨论有界BCK-代数，需下列：

4．算子N

我们知道，在一个有界的BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$中，

$$\forall x\in X, \quad x*1=0. \qquad (2)$$

但是，$1*x$ 在不同的 $\langle X; *, 0\rangle$ 中可能会有不同的结果。

例10 1）例1中 $1*x=0$。

2）例2中 $1*A=X-A$，其中A是X的任一子集。

3）例3中 $b*0=a$，$b*a=b$，$b*b=0$。

这就有必要研究 $1*x$，即有下列：

定义2 在有界BCK-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 中，设1是它的单位元，记

$$N(x)=Nx=1*x. \tag{3}$$

注 我们可以视N为一个算子：

$$N: X\longrightarrow X,$$

$$x\longmapsto 1*x. \tag{4}$$

例11 如例3中，$N(0)=a$，$N(a)=b$，$N(b)=0$。

例2中，$N(A)=X-A=CA$，即N为余集算子。

算子N有下列性质：

定理8 在有界BCK-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 中成立

1）$N1=0$，$NO=1$。

2）$NNx\leqslant x$。

3）$Nx*Ny\leqslant y*x$。

4）$y\leqslant x\Longrightarrow Nx\leqslant Ny$。

5）$Nx*y=Ny*x$。

6）$x\wedge 1=NNx$。

7）$NNNx=Nx$。

证 我们分别证明如下。

1）$N1=1*1=0$，$NO=1*0=1$。

2）由BCK-代数的定义中的公理Ⅱ知

$1*(1*x)\leqslant x$，

此即

$$NNx \leqslant x.$$

3）由BCK-代数的定义中的公理 I 可知：

$$(1*x)*(1*y) \leqslant y*x,$$

此即

$$Nx*Ny \leqslant y*x.$$

4）当 $y \leqslant x$，则 $y*x=0$，故由 3）知

$$Nx*Ny \leqslant y*x=0,$$

因此 $Nx \leqslant Ny$。

5）由 BCK-代数的一个重要性质知（见定理1.5）

$$(1*x)*y=(1*y)*x,$$

此即

$$Nx*y=Ny*x.$$

6）因为 $x \wedge 1=1*(1*x)=NNx$。

7）由 2）知，

$$NNx \leqslant x.$$

由 4）又有

$$Nx \leqslant NNNx.$$

由 2）对元素Nx有

$$NNNx \leqslant Nx.$$

因此，

$$NNNx=Nx. \qquad \text{Q·E·D·}$$

推论 在有界可换BCK-代数〈X；$*$，0〉中成立：

$$\forall x \in X,\ NNx=x. \tag{5}$$

证 由 6）知

$$NNx=x \wedge 1.$$

由于X可换，故

$$x \wedge 1 = 1 \wedge x.$$

由定理3知，

$$1 \wedge x = x.$$

因此， $NNx = x.$ Q·E·D·

注 在一般的有界（不必可换）的BCK-代数中公式（5）不必成立，可见下面的：

例12 在例5中，$NN(\omega) = 1 * (1 * \omega) = 1 \neq \omega$。

设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个有界的BCK-代数。从任意的 $x \in X$ 出发，利用算子N至多能有三个不同的元素：

$$x, \quad Nx, \quad NNx.$$

因为由定理8的7）知

$$NNNx = Nx,$$

$$NNNNx = NNx,$$

$$NNNNNx = NNNx = Nx,$$

等。为了方便起见，按李丹〔45〕引入的记号，有下列：

定义3 记 $N^2x = NNx$。

5. 算子N的不动点集和完全有界的BCK-代数

李丹在〔45〕中引入了算子N的不动点集的概念，即有下列：

定义4 在有界BCK-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 中，若

$$Nx = x, \quad x \in X, \tag{6}$$

则称 x 为算子N的不动点。$\langle X; *, 0\rangle$ 中一切不动点的集合被称为算子N的不动点集，记为 $N(X)$。

例13 设 $X = \{0, a, b\}$，X中的二元运算 $*$ 由下表给出：

$*$	0	a	b
0	0	0	0
a	a	0	0
b	b	a	0 ,

则 $\langle X;\ *, 0\rangle$ 是一个有界的BCK-代数，且 b 是X中的单位元，而

$$N(X)=\{a\},$$

例14 例 3 中，$N(X)=\phi$。

李丹在〔45〕中进一步引进了完全有界 BCK-代数的概念，即有下列的：

定义 5 如果有界BCK-代数 $\langle X;\ *,\ 0\rangle$ 满足

$$N(X)=X-\{0,\ 1\}, \tag{7}$$

则称之为完全的。

例15 例13中的 BCK-代数是完全有界的，而例 3 中的 BCK-代数虽是有界的，而不是完全的。

完全有界的 BCK-代数有下列性质：

定理 9 （李丹[45]）设 $\langle X;\ *, 0\rangle$ 是一个完全有界的BCK-代数，则

1）$\forall x\in X,\quad N^2x=x$。

2）$\forall x,\ y\in X,\ x\leqslant N(Nx\wedge Ny)$。

证 1）当 $x=0$ 时，$NNO=N1=0$。当 $x=1$ 时，$NN1=N0=1$。当 $x\neq0,\ 1$ 时，因 X 是完全有界的，故 $x\in N(X)$，即 $Nx=x$，因此 $NNx=Nx=x$。

2）由于

$$\begin{aligned}(Nx\wedge Ny)*Nx&=(Ny*(Ny*Nx))*Nx\\&=(Ny*Nx)*(Ny*Nx)\end{aligned}$$

$$= 0.$$

故 $$Nx \wedge Ny \leqslant Nx.$$

（由定理8的4）可知，

$$NNx \leqslant N(Nx \wedge Ny).$$

由于1），则有

$$x \leqslant N(Nx \wedge Ny). \qquad \text{Q·E·D·}$$

由上面这个定理证明2）中顺便可得到下列：

定理10 设〈X；∗，0〉是一个有界的BCK-代数，则

$$\forall x, y \in X, \quad (Nx \wedge Ny) * Nx = 0, \tag{8}$$

或

$$Nx \wedge Ny \leqslant Nx. \qquad \text{Q·E·D·} \tag{8'}$$

6．运算∨

定理9的2）给出，当X完全有界时，对于任意的 $x, y \in X$，有

$$x \leqslant N(Nx \wedge Ny),$$

即 $N(Nx \wedge Ny)$ 是大于或等于 x 的一个元素。下面我们在有界、可换的BCK-代数中专门讨论一下这个元素 $N(Nx \wedge Ny)$。自然地，我们可以把它看作一个二元运算，因此有下列：

定义6 设〈X；∗，0〉是一个有界可换的BCK-代数，记

$$x \vee y = N(Nx \wedge Ny). \tag{9}$$

例16 例13中的BCK-代数〈X；∗，0〉是有界可换的，且

$$\begin{aligned} a \vee o &= b * ((b * a) \wedge (b * 0)) \\ &= b * (a \wedge b) \\ &= b * (b * (b * a)) \\ &= a, \end{aligned}$$

其余的（如 $a \vee b$ 等）亦可类似地算出。

在本节的开始，我们曾经指出，我们要找一个运算$\vee$，使（X，$\wedge$，$\vee$）成为一个格。现在，我们已经在有界可换的BCK-代数中定义了二元运算$\vee$，那么（X，$\wedge$，$\vee$）是否一个格呢？这个问题的回答是肯定的，即有下列的：

定理11 （K·Iséki和S·Tanaka，[19]）。任意的有界可换的BCK-代数是关于$\wedge$和$\vee$的一个格，即若$\langle X; *, 0\rangle$是一个有界可换的BCK-代数，则（X，$\wedge$，$\vee$）是一个格。

证 由定理2.4知，$x\wedge y$是x和y的下确界，其中x和y是X中的任意元素。现在，只要证明$x\vee y$是x和y的上确界，这个定理就得证了。

为证这个事实，我们先给出两个引理。

引理3 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个有界的可换的BCK-代数，则

$$\forall x\in X,\ NNx=x. \tag{10}$$

证 因为，$NNx=1*(1*x)=x\wedge 1=1\wedge x=x$，后一等式是由于定理3。 Q. E. D.

引理4 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个有界可换的BCK-代数，则对于任意的x，$y\in X$成立

$$Nx\wedge Ny\leqslant Ny. \tag{11}$$

证 由于X是可换的及（8′）有

$$Nx\wedge Ny=Ny\wedge Nx\leqslant Ny. \qquad \text{Q·E·D·}$$

现在来证定理11。设x和y是X中的任意两个元素，由（8′）及（11）有

$$Nx\wedge Ny\leqslant Nx,\ Nx\wedge Ny\leqslant Ny.$$

由定理8的4）及引理3有

$$x=NNx\leqslant N(Nx\wedge Ny)=x\vee y,$$

$$y=NNy\leqslant N(Nx\wedge Ny)=x\vee y,$$

故 $x\vee y$ 是 x 和 y 的一个上界。

下面再证 $x\vee y$ 是 x 和 y 的一个最小上界。设 $u\in X$，且 $x\leqslant u$ 和 $y\leqslant u$。

由定理 8 的 4）知，$Nu\leqslant Nx$，$Nu\leqslant Nx$，故 $Nu\leqslant Nx\wedge Ny$。再由定理 8 的 4）及引理 3 有：

$$x\vee y=N(Nx\wedge Ny)\leqslant NNu=u. \quad \text{Q·E·D·}$$

有界可换的 BCK-代数还有下列性质：

定理12 设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个有界可换的 BCK-代数，则对于任意的 x，$y\in X$ 成立

$$Nx\vee Ny=N(x\wedge y), \tag{12}$$

$$Nx\wedge Ny=N(x\vee y). \tag{13}$$

证 先证（12）。因为

$$Nx\vee Ny=N(NNx\wedge NNy)=N(x\wedge y),$$

其中用到了运算 $\vee$ 的定义及引理 3。

再证（13）。因

$$N(x\vee y)=N(N(Nx\wedge Ny))=NN(Nx\wedge Ny)$$
$$=Nx\wedge Ny,$$

后一等式仍用到了引理 3。　　　　　　　　　　Q·E·D·

7．对合的概念

定义 7 设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个有界的 BCK-代数。如果 $x\in X$ 满足

$$NNx=x, \tag{14}$$

则称 x 为X的一个对合。X的一切对合作成的集合被称为X的对合集，记为 $I(X)$。

定理13 设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个有界的BCK-代数，则

$$0 \in I(X), \quad 1 \in I(X),$$

因而 I(X) 非空，且 $|I(X)| \geq 2$.

证 因

$$NN0 = N1 = 0, \quad NN1 = N0 = 1,$$

从而后一结论亦真。 Q·E·D·

定理14 如果 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个完全有界的 BCK-代数或有界可换的BCK-代数，则 $I(X) = X$。

证 由定理 9 的 1）及引理 1 知。 Q·E·D·

对合元素具有下列性质：

定理15 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个有界 BCK-代数。则对于任意的 x，$y \in I(X)$ 成立下列两个等式：

$$x * y = Ny * Nx, \tag{14}$$

$$x * Ny = y * Nx. \tag{15}$$

证 先证（14）。由定理 8 的 5），以 Nx 代替其中的 x，则有

$$x * y = N(Nx) * y = Ny * Nx.$$

这就得到（14）。

在（14）中以 Ny 代 y，则得

$$x * Ny = N(Ny) * Nx = y * Nx. \quad \text{Q·E·D·}$$

对于对合集 I(X) 则有下列结果：

定理16 如果 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个有界的 BCK-代数，则 $\langle I(X); *, 0\rangle$ 也是一个有界BCK-代数，即是X的一个有界子代数。

证 先证 $\langle I(X); *, 0\rangle$ 是一个 BCK-代数。由于 $I(X) \subseteq X$，且 $0 \in I(X)$，故只要证明：“$x, y \in I(X) \Rightarrow x * y \in I(X)$”即可。

设 $x, y \in I(X)$。由定理 8 的 2）有

$$NN(x*y) \leq x*y. \tag{16}$$

另一方面，我们再来计算：由（14）有

$$(x*y)*NN(x*y) = (Ny*Nx)*NN(x*y).$$

再由定理 1·5 有

$$(x*y)*NN(x*y) = (Ny*NN(x*y))*N(x).$$

由定理 8 的 5）及 7）有：

$$\begin{aligned}(x*y)*NN(x*y) &= (NNN(x*y)*y)*Nx \\ &= (N(x*y)*y)*Nx \\ &= (N(x*y)*Nx)*y,\end{aligned}$$

后一等式是由于定理 1·5，再 由（14）有：

$$\begin{aligned}(x*y)*NN(x*y) &= (x*(x*y))*y \\ &= (x*y)*(x*y) \\ &= 0,\end{aligned}$$

这就有

$$x*y \leqslant NN(x*y).$$

结合（16）便有

$$NN(x*y) = x*y,$$

因此 $x*y \in \mathrm{I}(X)$。

由定理13又知 $1 \in \mathrm{I}(X)$，故 $\mathrm{I}(X)$ 是有界的。　Q·E·D·

刚才证明过的定理16说，$\langle X; *, 0\rangle$ 是有界的BCK-代数，那么$\mathrm{I}(X)$ 也是有界的 BCK-代数（在同样的$*$及 0 下）。李丹[45]中进一步考虑了一个问题：$\mathrm{I}(\mathrm{I}(X))$ 是什么呢？她的回答是：“它不再变小”，即有下列：

定理17　（李丹[45]）．如果 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个有界BCK-代数，则

$$\mathrm{I}(\mathrm{I}(X)) = \mathrm{I}(X). \tag{17}$$

证 “$\subseteq$”显然。

$\forall x\in X$，由于定理8的7）

$NNNx=Nx$

故 $Nx\in I(X)$。同理，对于有界BCK-代数⟨I(X)；$*$，0⟩来说，有

$x=NNx\in I(I(X))$。

故 $I(I(X))\supseteq I(X)$。所以（17）成立。 Q·E·D·

推论 （李丹[45]。）存在每个元素皆为对合的BCK-代数。这样的BCK-代数称为满对合的。从每个有界的BCK-代数出发皆可构造一个满对合的BCK-代数。

证 任取一个有界BCK-代数⟨X；$*$，0⟩，则⟨$I(X)$；$*$，0⟩也是一个有界BCK-代数。由定理17，⟨$I(X)$；$*$，0⟩就是一个满对合的BCK-代数。 Q·E·D·

§4 正定关联的BCK-代数

在这一节中我们来讨论一类特殊的BCK-代数——正定关联的BCK-代数。

1．BCK-代数的一个性质

定理1 如果⟨X；$*$，0⟩是一个BCK-代数，x，y，z是X中的任意三个元素，则有

$$(x*y)*z\leqslant(x*z)*(y*z). \tag{1}$$

证 我们知道，由定理1·5可知，成立：

$$((x*y)*z)*((x*z)*(y*z))$$

$$=((x*z)*y)*((x*z)(y*z)),$$

再由BCK-代数定义中的公理1知，

$$((x*y)*z)*((x*z)*(y*z))$$

$\leqslant (y*z)*y=(y*y)*z=0*z=0$。

故 $(x*y)*z \leqslant (x*z)*(y*z)$。 Q·E·D·

例 1 设X为任一非空集合。在BCK-代数 $\langle P(X);\ -, \phi\rangle$ 中，设A，B，C是X中的任意三个子集，由（1）则有

$$(A-B)-C \subseteq (A-C)-(B-C).$$

一般地讲，对于一个BCK-代数 $\langle X;\ *, 0\rangle$ 来说，（1）中的不等号不能改为等号。

例 2 [注21] 设X＝{0，1，2，3}，X中的二元运算*由下表给出：

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	1	0	2
3	3	0	0	0，

则 $\langle X;\ *, 0\rangle$ 是一个BCK-代数，但在其中不等号（1）不能改为等号。事实上，

$$(2*1)*1=0\neq 1=(2*1)*(1*1).$$

例 3 （1）中不等号成为等号的例子。设X＝{0，1，2，3，4，5}，X中的二元运算*由下表给出

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
2	2	2	0	2	2	2
3	3	3	3	0	3	3
4	4	4	4	4	0	4
5	5	5	5	5	5	0，

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCK-代数，不难验证，在 X 中对于任意的三个元素 x, y, z，（1）中取等号。

这样，我们有必要研究这样的 BCK-代数，使在其中，不等号（1）可以改为等号。这种 BCK-代数首先由 K. Iséki 在 1975 年进行研究。他把这种代数叫做正定关联的 BCK-代数。

2．正定关联 BCK-代数的概念

我们先介绍一下这种代数的定义。

定义 1　如果对于 BCK-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 中任意三个元素 x, y, z 成立：

$$(x*y)*z=(x*z)*(y*z). \tag{2}$$

则称它是正定关联的。

为了便于举例，我们先给出正定关联 BCK-代数的一个特征性质，即有下列：

定理 2　BCK-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 是正定关联的充要条件是对于任意的 $x, y\in X$ 成立

$$x*y=(x*y)*y. \tag{3}$$

证　"⇒"。由于（2）成立，特别地取 $z=y$ 则有

$$\begin{aligned}(x*y)*y&=(x*y)*(y*y)\\&=(x*y)*0\\&=x*y,\end{aligned}$$

后二等式用到了 BCK-代数定义中的公理（Ⅱ）及定理 1·6 的 4）。

"⇐"。由于（1）成立，为证（2），只要证明

$$(x*z)*(y*z)\leqslant(x*y)*z. \tag{4}$$

由 BCK-代数的定义中的公理（Ⅰ）有

$$(x*y)*(x*z)\leqslant(z*y).$$

由定理 1.6 的 2）对于任意的 $u\in X$ 有

$$((x*y)*(x*z))*u\leq(z*y)*u.$$

在这个不等式中分别用 $x*z$， $y*z$, $(x*z)*z$, $(x*y)*z$ 代替 x， y， z 和 u， 则有

$$\begin{aligned}k&\equiv(((x*z)*(y*z))*((x*y)*z))*\\&\quad*((x*z)*((x*z)*z))\\&\leqslant(((x*z)*z)*(y*z))*((x*y)*z)\\&=(((x*z)*z)*(y*z))*((x*z)*y)\\&=(((x*z)*z)*((x*z)*y))*(y*z)\\&\leqslant(y*z)*(y*z)=0.\end{aligned}$$

后一不等式是由于 BCK-代数的定义中的公理（I）．这样，

$$\begin{aligned}k=&(((x*z)*(y*z))*((x*y)*z))*\\&*((x*z)*((x*z)*z))=0,\end{aligned}$$

由于（3）成立，故

$$\begin{aligned}&(x*z)*((x*z)*z)\\&=(x*z)*(x*z)=0,\end{aligned}$$

再由定理 1·6 的 4）知

$$((x*z)*(y*z))*((x*y)*z)=0,$$

故

$$(x*z)*(y*z)\leqslant(x*y)*z. \qquad \text{Q·E·D·}$$

1984年5月西北大学数学系孟杰在[49]中给上述K. Iséki 和 S. Tanaka 定理的充分性证明一个较简单的方法：

方法二（充分性）．由 K－1知

$$(x*z)*(y*z)\leqslant x*y.$$

其次，由（3）知

$$(x*z)*(y*z)=((x*z)*z)*(y*z)$$

$$= ((x*z)*(y*z))*z$$
$$\leqslant (x*y)*z,$$

后一不等式用到了定理1·6的2）。

另一方面，又有

$$(x*y)*z=(x*z)*y\leqslant (x*z)*(y*z),$$

后一不等式是由于定理1·6的3）及2）。

据K-5知，（2）成立。　　　　Q·E·D·

下面我们给出几个例子。

例4　例2中给出的BCK-代数不是正定关联的，而例3中给出的BCK-代数是正定关联的。

例5　平凡BCK-代数是正定关联的。

例6[注22]　例1中的$\langle P(X);\ -,\ \phi\rangle$是一个正定关联的BCK-代数，因为对于X中的任何两个子集A和B，总有

$$(A-B)-B=A-B.$$

由这个例子我们可以得到下列：

定理3[注23]　存在无穷多个正定关联的BCK-代数。

证　命$X_n=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$，如例，那样，$\langle P(X_n);\ -,\phi\rangle$是正定关联的BCK-代数，且$|X_n|=n$，$|P(X_n)|=2^n$。如果自然数$m\neq n$，则$X_m\neq X_n$，且$P(X_m)\neq P(X_n)$。故$\langle P(X_n);\ -,\ \phi\rangle$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$是无穷多个两两不相同的正定关联的BCK-代数。　　　　Q·E·D·

这个定理指出了正定关联BCK-代数类的无穷性，但是还不足以回答真类问题和基数问题，因此我们有必要进一步研究正定关联BCK-代数类。

3. 正定关联BCK-代数类

对于正定关联BCK-代数类我们自然有下列：

问题 1　正定关联BCK-代数类是一个真类吗？对于任意的一个基数$\gamma>0$，存在一个基数为γ的正定关联BCK-代数吗？正定关联BCK-代数类是BCK-代数类的一个真子类吗？

对此，我们有下列肯定回答：

定理 4[注24]　对于任意的基数$\gamma>0$，存在一个基数为γ的正定关联的BCK-代数。因此，正定关联BCK-代数类是一个真类。正定关联BCK-代数类是BCK-代数类的一个真子类。

证　设γ是任意的一个基数。任意取一个基数为γ的集合X，在X中任意选取一个元素，记为0。如引理1·1那样，在X中建立一个半序：$\forall x\in X$，命$0\leqslant x$，当x和y皆为非0元时，x和y不可比较。X中的二元运算$*$如引理1·1那样定义：

$$x*y=\begin{cases}0, & x\leqslant y,\\ x, & \text{否则}.\end{cases}$$

由引理1·1知，$\langle X;*,0\rangle$是一个BCK-代数，且$|X|=\gamma$。现证它是正定关联的。当$x*y=0$时，显然，

$$(x*y)*y=0*y=0=(x*y).$$

当$x*y=x$时，此时

$$(x*y)*y=x*y.$$

故（3）成立，因此它是正定关联的。　　　Q·E·D·

下面，我们要讨论正定关联BCK-代数类的一个子类——可换的正定关联BCK-代数类。我们自然要提出下列：

问题 2　是否存在可换的正定关联的BCK-代数？

我们给这个问题一个肯定的回答：

定理 5　存在可换的正定关联的BCK-代数。

证　见下列例7和例8。　　　Q·E·D·

例 7　平凡的BCK-代数是可换的正定关联的BCK-代数。

例 8　定理 4 的证明中给出的BCK-代数〈X；∗，0〉是可换的和正定关联的（参看引理 2·1 的证明）．

这样，据定理 4 的证明可有下列：

定理 6〔注25〕　对于任意的基数$\gamma>0$，存在一个基数为γ的可换的正定关联的BCK-代数．因此，可换的正定关联的BCK-代数类是一个真类．可换的正定关联BCK-代数类是BCK-代数类的一个真子类．

证　第一个结论由定理 4 的证明可知．第二个结论由第一个结论知．由于

可换的正定关联BCK-代数类 ⊆正定关联BCK-代数类，

且因定理 4，而可有第三个结论成立．　　Q·E·D·

注　上面证明中的包含关系是否真包含，这是值得考虑的一个问题．作者在这里提出下列：

问题 3〔注26〕　是否存在一个正定关联的BCK-代数，它不是可换的？

作者认为，类似地可以讨论有界性和正定关联性的关系．有兴趣的读者可自行去讨论．

我们再举几个例子．

例 9　存在着这样的BCK-代数，它既不是可换的，也不是正定关联的．例如，例 2 中的BCK-代数〈X；∗，0〉(cf．例 2.1)．

例10　存在着可换的BCK-代数，它不是正定关联的．如例 2·4 中，〈X；∗，0〉是一个可换的BCK-代数，但它不是正定关联的，因为 5·1∈X，且

$$5*1=5-1=4,$$

$$(5*1)*1=4-1=3,$$

$4\neq 3$，即（3）不成立。

例11 设X是任一非空集合，则⟨P(X)；—，ϕ⟩是可换的正定关联BCK-代数。它的正定关联性已在例6中证明了。这里我们再指出它的可换性。事实上，对于任意的A，B∈P(X)，我们有

$$B\wedge A=A-(A-B)=A\cap B=B-(B-A)=A\wedge B.$$

因此，⟨P(X)；—，0⟩是可换的。

4．正定关联BCK-代数的性质

下面我们给出正定关联的BCK-代数的一个性质：

定理7 如果⟨X；*，0⟩是一个正定关联的BCK-代数，那么对于X中的任意两个元素成立：

$$(x*(y*x))*(x*y)=(y*(y*x))*(x*y), \tag{5}$$

亦即

$$(y\wedge x)*(y*x)=(x\wedge y)*(x*y). \tag{5'}$$

证 因为

$$(x*(y*x))*(x*y)=(x*(x*y))*(y*x)$$
$$=((x*(x*y))*(x*y))*(y*x),$$

后一等式是由于（3）。由BCK-代数的定义中的公理（I）我们有

$$(x*(x*y))*(x*y)\leqslant y*(x*y),$$

再据定理1·6的2）我们有

$$(x*(y*x))*(x*y)\leqslant(y*(x*y))*(y*x). \tag{6}$$

在（6）中x与y互换，则有

$$(y*(x*y))*(y*x)\leqslant(x*(y*x))*(x*y). \tag{7}$$

把（6）和（7）结合在一起便有

$$(x*(y*x))*(x*y)=(y*(x*y))*(y*x)$$
$$=(y*(y*x))*(x*y),$$

这就证得了（5）。由（5）即可表示为（5′）。 Q·E·D·

对于可换的BCK-代数，正定关联性还有以下特征：

定理 8 在可换的BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$中，对于任意的x，$y\in X$下面的等式是等价的：

1） $x*(y*x)=x$。 （8）

2） $(x*y)*y=x*y$。 （3）

证 先证（8）⇒（3）。由于定理1.6的3），我们有

$$(x*y)*y\leqslant x*y.$$

为证（3），只要证明

$$(x*y)\leqslant(x*y)*y.$$

为此，我们计算：

$$(x*y)*((x*y)*y)=y\wedge(x*y)$$
$$=(x*y)\wedge y$$
$$=y*(y*(x*y))$$
$$=0,$$

后一等式是由于由（8）可知

$$x*(x*(y*x))=0,$$

从而

$$y*(y*(x*y))=0.$$

再由（3）⇒（8）。同样地，由定理1·6的3），我们有

$$x*(y*x)\leqslant x,$$

为证（8），只要证明

$$x\leqslant x*(y*x).$$

为此，我们计算：

$$\begin{aligned}x*(x*(y*x)) &= (y*x)\wedge x\\ &= x\wedge(y*x)\\ &= (y*x)*((y*x)*x)\\ &= 0,\end{aligned}$$

后一等式是由于（3），因由（3）可知

$$(x*y)*((x*y)*y)=0,$$

将x和y交换一下，即得

$$(y*x)*((y*x)*x)=0.$$

于是，这有

$$x\leqslant x*(y*x),$$

这就证得了（8）. Q.E.D.

§5 关联的BCK-代数

我们在这一节中再来讨论一类特殊的BCK-代数，即关联的BCK-代数。这一种代数有许多有趣的性质。

1. 关联BCI-代数的概念

在第4节中我们曾经得到一个结果：对于可换的BCK-代数来说，

$$\text{正定关联性}\iff x*(y*x)=x.$$

这个结果给我们一个启示：有必要研究满足右边这个等式的BCK-代数。这就是关联的BCK-代数。

定义 1 如果BCK-代数⟨X；$*$，0⟩的任意两个元素$x, y \in$ X都满足

$$x*(y*x)=x, \tag{1}$$

则称它为关联的BCK-代数。

例 1 平凡的BCK-代数是关联的。

例 2 由定理4·8知，任何可换的正定关联的BCK-代数都是关联的。特别地，有下列：

例 3 对于任意的非空集合X，⟨P(X)；—，ϕ⟩是一个关联的BCK-代数（见例4·11），（1）在这个代数中即为：

$$A-(B-A)=A, \tag{2}$$

其中A和B是X的任意两个子集。我们也容易直接验证（2）的正确性。

例 4 非关联的BCK-代数的例子。如例2·4。

我们是否能找到一个关联的BCK-代数，它或者不是可换的，或者不是正定关联的呢？答案是否定的。其实，关联性就是可换性+正定关联性。这个事实由下列定理给出。

定理 1 设⟨X；$*$，0⟩是一个BCK-代数。那么下列两个断言等价：

1）X是关联的；

2）X是可换和正定关联的。

证 2）⇒1），这已由定理4·8给出。

现在我们来证1）⇒2），设⟨X；$*$，0⟩是一个关联的BCK-代数。

1° 先证X是正定关联的。我们只要证明，对于任意的y和$z \in$ X，成立

$$(z*y)*y=z*y \tag{3}$$

即可（据定理 4.2），由定理 1.6 的 3）有

$$(z*y)*y\leqslant z*y,$$

因此只要证明

$$(z*y)\leqslant(z*y)*y,$$

或

$$(z*y)*((z*y)*y)=0. \tag{4}$$

为证（4），我们从BCK–代数的定义中的公理（I）出发：以 $z*y$ 代x，以$(z*y)*y$代 y，以 $(z*y)*(z*(z*y))$ 代 z，则有

$$\begin{aligned}&((z*y)*((z*y)*y))*((z*y)\\&\quad*((z*y)*(z*(z*y)))\\&\quad\leqslant((z*y)*(z*(z*y)))*((z*y)*y)\\&\quad=0.\end{aligned}$$

后一等式仍因为公理（I）。这样，

$$\begin{aligned}&(z*y)*((z*y)*y)\\&\leqslant((z*y)*((z*y)*(z*(z*y)))\\&=0.\end{aligned}$$

右端的等式是由于关联性：（以 $z*y$ 代 x，以 z 代 y）

$$(z*y)*(z*(z*y))=z*y$$

这就得到（4）。

2°再证X是可换的。设 x，y，z，u 是X中的任意四个元素。由公理（I）

$$\begin{aligned}(x*(y*z))*(x*(y*u))&\leqslant(y*u)*(y*z)\\&\leqslant z*u,\end{aligned}$$

后一不等式之所以成立仍是由于公理(I)。再据定理 1.6 的 1）而有

$$(x*(y*z))*(z*u)\leqslant x*(y*u)。$$

在这个不等式中以 x 换 y，y 换 z，$y*x$ 换 u，则有

$$\begin{aligned}(x*(x*y))*(y*(y*x))&\leqslant x*(x*(y*x))\\&=x*x\\&=0,\end{aligned}$$

后面的等式成立是由于关联性条件及公理（Ⅱ）。这样，我们得到

$$x*(x*y)\leqslant y*(y*x)。$$

互换 x 和 y，又可得到

$$y*(y*x)\leqslant x*(x*y)。$$

由最后的两个不等式便有

$$x*(x*y)=y*(y*x),$$

即 $x\wedge y=y\wedge x$。 Q. E. D.

这个定理 1 是首先由 K. Iséki 和 S. Tanaka 在[19]中得到的。1984年 5 月西北大学数学系孟杰在[49]中简化了这个定理的证明，即给出了下列：

方法二。

1⇒2）。在（1）中以 $x*y$ 代替 x 得

$$x*y=(x*y)*(y*(x*y))=(x*y)*y,$$

后一等式仍由于（1）而成立，这就证得 X是正定关联的。

其次，由于X是关联的，由（1）有

$$\begin{aligned}x*(x*y)&=(x*(y*x))*(x*y)\\&=(x*(x*y))*(y*x)\\&\leqslant y*(y*x),\end{aligned}$$

最后的不等式是由于 K-2 及定理 1.6 的 2）。再互换 x 和y可得

$$y*(y*x)\leqslant x*(x*y)。$$

据 K-5 有

$$x*(x*y)=y*(y*x).$$

所以X是可换的。

2）⇒1）。不等式

$$x*(y*x)\leqslant x$$

显然成立（由定理 1·6 的 3）），只要证明

$$x\leqslant x*(y*x).$$

计算（由可换性及正定关联性）

$$\begin{aligned}x*(x*(y*x)) &= (y*x)*((y*x)*x)\\ &= ((y*x)*x)*((y*x)*x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

故

$$x\leqslant x*(y*x).$$

因此得到 $x=x*(y*x)$，即X是关联的。　Q·E·D·

由定理 1 和定理 4·6 可得到下列：

定理 2〔注27〕 对于任意的基数 $\gamma>0$，存在一个基数为 γ 的关联的BCK-代数。关联 BCK-代数类是一个真类，它是 BCK-代数类的一个真子类。　Q·E·D·

2．有界关联的BCK-代数

我们再来研究具有有界、可换、正定关联三个性质的BCK-代数，这就是有界关联的 BCK-代数.

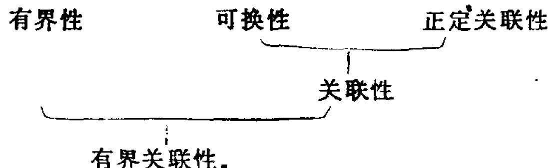


图 2-2

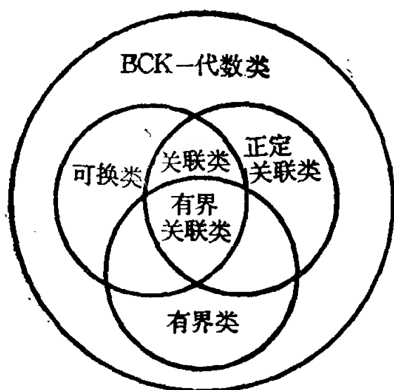


图 2-3

下面举几个例子。

例 5 平凡的BCK-代数是有界关联的。

例 6 设X是一个非空集合，则⟨P(X)；—,ϕ⟩是一个有界关联的BCK-代数。

由这个例子可以得到下列：

定理 3〔注28〕 存在无穷多个有界关联的BCK-代数，而且一切有界关联的BCK-代数作成的类是一切BCK-代数作成的类的一个真子类。一切有界关联BCK-代数作成一个真类。

证 由例 6，显然存在无穷多个有界关联的BCK-代数。事实上，取X = {ϕ}，则{P(X_1)； —,ϕ}是一个有界关联的BCK-代数。又取 X_2 = P(X_1)，则⟨P(X_2)； —，ϕ⟩，亦然，继续下去；这样，

$$P(X_1),\ P(X_2),\ \cdots,\ P(X_n),\ \cdots \qquad (5)$$

按"—，ϕ"皆作成有界关联的BCK-代数，而且（5）中任两个集合P(X_n)≠P(X_m)，当$m \neq n$时。

一切有界关联的BCK-代数若作成一个集合S。那么，P(US)；(—，ϕ)也作成一个有界关联的BCK-代数，而且|P(US)| > |A|，A为S中任一成员。故P(US)∉S。这是一个矛盾。因此S是一个真类，而不是一个集合。

由于例 4·2 中给出的BCK-代数⟨X；$*$，0⟩不是有界关联的，因此S是一切BCK-代数作成的类的一个真子类。

Q·E·D·

例 7 设 $|X| \geqslant 3$，X中建立半序 $\leqslant$，任取 $0 \in X$，使 $\forall x \in X$，$0 \leqslant x$，如果 x 和 y 是X中任二非0元，且 $x \neq y$，则 x 与 y 不可比较。X 中定义运算：

$$*：x * y = \begin{cases} 0, & x \leqslant y, \\ x, & 否则, \end{cases}$$

由定理4.4的证明知，$\langle X; *, 0\rangle$ 是正定关联的；由引理2.1又知它是可换的，因此它是关联的。但X不是有界的。事实上，0不是它的最大元，因 $|X| \geqslant 3$，故X中存在非零元 a，于是，$a * 0 = a \neq 0$。X 中任何非零元不是最大元。不妨设非零元 a 是最大元，由于 $|X| \geqslant 3$，故X中还有另一个非零元 b，于是 $b * a = b \neq a$。这与 a 是最大元的假设矛盾。因此X不是有界的，从而X不是有界关联的。

由这个例子，我们可以得到：

定理 4 (注29) 有界关联的BCK-代数类是关联BCK-代数类的一个真子类。 Q·E·D·

3．有界关联BCK-代数的性质

我们先有下列：

定理 5 在一个有界可换的BCK-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 中下面的条件是等价的：

1° $x = x * (y * x)$。 (1)

2° $x * y = (x * y) * y$。 (3)

3° $(x * z) * (y * z) = (x * y) * z$。 (6)

4° $x \vee Nx = 0$。 (7)

5° $x \vee Nx = 1$。 (8)

6° $x = x * Nx$。 (9)

7° $Nx = Nx * x$。 (10)

8° $x*(x*Ny)\leq x*y$. (11)

9° $x*(x*y)\leq x*Ny$. (12)

10° $(x*(y*z))*(x*y)\leq x*Nz$. (13)

证由定理 4.2 及 4.8 已知 1°⟺2°⟺3°. 我们先把这个定理的证明步骤列表于下:

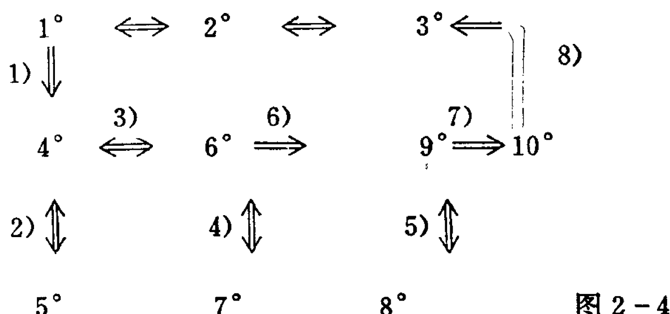


图 2－4

下面我们一一地给出这个证明.

1) 1°⟹4°. 我们计算一下:

$$x\wedge Nx=Nx\wedge x=x*(x*(x*Nx)$$
$$=x*(x*(1*x))=0.$$

其中第一个等式用到了可换性, 最后一个等式据条件 1°.

2) 4°⟺5°. 这是由于如果

$$x\wedge Nx=0,$$

那么

$$N(x\wedge Nx)=No=1.$$

由定理3.12 (用到了有界可换性) 知

$$Nx\vee NNx=1.$$

(由引理 3.3, $NNx=x$, 再由可换性知

$$x\vee Nx=1. \qquad 5°$$

反之, 如果 5°成立, 则 $NNx\vee Nx=1$, 从而 $Nx\vee NNx=1$.

再由定理 3·12 及定理 3·8 的 1）有 $N(x_\wedge Nx)=\dot{N}o$。由于引理 3·3可知（两边先取N），$x\wedge Nx=0$。

3）$4^\circ \Longleftrightarrow 6^\circ$。

我们先由$4^\circ \Rightarrow 6^\circ$。由于定理 1.6 的 3），我们有

$$x*Nx\leqslant x.$$

为证6°，只要证明 $x\leqslant x*Nx$ 即可。为此，我们计算

$$x*(x*Nx)=Nx_\wedge x=x_\wedge Nx=0,$$

后二等式分别用到了可换性和条件4°。于是，$x\leqslant x*Nx$。

再由$6^\circ \Rightarrow 4^\circ$。由于$6^\circ$成立，故

$$x*(x*Nx)=0,$$

即

$$Nx_\wedge x=0,$$

由于可换性则有

$$x_\wedge Nx=0.$$

4）$6^\circ \Longleftrightarrow 7^\circ$。

我们先由$6^\circ \Rightarrow 7^\circ$。在$6^\circ$中以$Nx$ 代 x，

$$Nx=Nx*NNx.$$

因引理 3·3，$NNx=x$，故 $Nx=Nx*x$。这就是7°。

再由$7^\circ \Rightarrow 6^\circ$。在$7^\circ$以$Nx$代 x，据引理3·3就得 6°。

5）$8^\circ \Longleftrightarrow 9^\circ$。这由引理 3·3 即知。

6）$6^\circ \Rightarrow 9^\circ$。为证这一点，我们先给出两个引理，它们本身是BCK–代数和有界 BCK–代数的性质。

引理 1 设 $\langle X;\ *,\ 0\rangle$ 是一个 BCK–代数，则对于 X中的任意四个元素 x，y，z，W，成立下列二式：

$$(x*(y*z))*(x*(y*W))\leqslant z*W, \tag{14}$$

$$(x*(y*z))*(z*W)\leqslant x*(y*W). \tag{15}$$

证 由BCK-代数的定义中的公理（Ⅰ）可知：

$$(x*(y*z))*(x*(y*W))\leqslant(y*W)*(y*z)$$
$$\leqslant z*W.$$

这里两次用到了公理（Ⅰ）。这就得到了（14）。再由定理1·6的1），我们立即得到（15）。　　　　Q·E·D·

引理2 如果⟨X；*，0⟩是一个有界的BCK-代数，则对于任意的x，$y\in X$成立

$$(x*(x*y))*(y*Nx)\leqslant x*(x*Nx).\qquad(16)$$

证 在（15）中以x代y，y代z，Nx代W，则有

$$(x*(x*y))*(y*Nx)\leqslant x*(x*Nx)\qquad Q\cdot E\cdot D\cdot$$

现在我们由6°⇒9°.由于X是有界的，故(16)成立，由6°知

$$x*(x*Nx)=0,$$

故

$$(x*(x*y))*(y*Nx)=0,$$

即有

$$x*(x*y)\leqslant y*Nx.$$

由于X是有界可换的，故由引理3·3知，I(X)=X。因此，x，$y\in I(X)$。再由定理3·15知，

$$y*Nx=x*Ny,$$

从而得到9°。

7）9°⇒10°。为证这一点，我们先给出下列：

引理3 对于有界关联的BCK-代数⟨X；*，0⟩中任意两个元素x和y成立

$$y\wedge x=x*Ny=y*Nx.\qquad(17)$$

证 由于X是有界关联的，故1°成立，从而9°成立。因此，

$$y\wedge x=x*(x*y)\leqslant x*Ny=y*Nx.$$

另一方面，我们可以算出

$$(x*Ny)*(y\wedge x)=(x*Ny)*(x*(x*y))$$
$$\leqslant(x*y)*Ny$$
$$=(x*y)*(1*y)$$

其中不等式成立是由于公理（I）．由于公理（I）

$$(x*y)*(x*1)\leqslant 1*y,$$

再由定理1.6的1）有

$$(x*y)*(1*y)\leqslant x*1=0,$$

故得

$$(x*Ny)*(y\wedge x)=0,$$

从而

$$x*Ny\leqslant y\wedge x.$$

把两方面结合起来，便得到（17）．　　Q·E·D·

检查这个证明我们可以发现，这个证明并不必要求正定关联性。因此，引理3的条件可改为：

引理4　对于有界、可换和满足条件9°的BCK-代数⟨X；*，0⟩中的任意两个元素x和y成立（17）．　Q·E·D·

现在我们证明由9°⇒10°．这时引理4的条件满足，因此（17）成立，故有

$$x\wedge y=y\wedge x=x*Ny=y*NX.$$

由公理（I）我们可以算出：

$$(x*(y*z))*(x*y)=(x*(x*y))*(y*z)$$
$$=(y\wedge x)*(y*z)$$
$$=(y*Nx)*(y*z)$$
$$\leqslant z*Nx=x*Nz$$

8）10°⇒3°．我们为证这一点，先给出下列：

引理 5 对于有界 BCK-代数 ⟨X; $*$, 0⟩ 中的任意两个元素 x 和 y 成立：

$$(x*y)*Ny=0. \tag{18}$$

证 因为 $x\leqslant 1$，由定理 1.6 的 2）知 $x*y\leqslant 1*y$，故

$$(x*y)*Ny=0. \qquad \text{Q·E·D·}$$

现在我们证明10°⇒3°。我们在10°中以 $x*y$ 代 x，z 代y，y 代z，便有

$$((x*y)*(z*y))*((x*y)*z)$$
$$\leqslant(x*y)*Ny=0,$$

后一等式据（18）。这样我们得到：

$$(x*y)*(z*y)\leqslant(x*y)*z=(x*z)*y$$

在最后这个不等式中把 y 与 z 互换一下就得到：

$$(x*z)*(y*z)\leqslant(x*y)*z.$$

再由定理 4.1 知

$$(x*y)*z\leqslant(x*z)*(y*z).$$

因此，我们得到3°。 Q·E·D·

由于定理 1，关联性蕴涵可换性。故我们由定理 5 立即得到下列：

推论 有界关联的 BCK-代数 ⟨X; $*$, 0⟩ 具有性质（7）—（13）。 Q·E·D·

4. 余元和有余元格

定理 5 中

$$x\wedge Nx=0 \tag{7}$$

和

$$x\vee Nx=1 \tag{8}$$

这二式很有意思。由定理 5 的推论知道，对于有界关联的 BCK-

代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 来说，$\forall x\in X$，存在 $y=Nx$ 满足（7）和(8)。现在，我们考虑一般的有界可换的BCK-代数，先有下列的：

定义 2 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个可换的有界的 BCK-代数，如果对于 $x\in X$ 存在一个元素 $y\in X$，满足

$$x\wedge y=0,\ x\vee y=1, \tag{19}$$

则称 y 为 x 的一个余元，且记 $y=-x$。

由这个定义及定理 5 的推论可知成立下列：

定理 6 有界关联 BCK-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 的每一个元素都有一个余元。 Q・E・D・

现在，我们对于有界关联 BCK-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 的任意两个元素 x 和 y，来具体地求一下 $x\wedge y$ 和 $x\vee y$。首先，由（12）有

$$x\wedge y=y\wedge x=x*(x*y)\leqslant x*Ny=y*Nx,$$

后一等式是由于引理 3.3 和定理 3.15。另一方面，由于 $x\leqslant 1$，故

$$x*y\leqslant 1*y.$$

从而

$$x*Ny=x*(1*y)\leqslant x*(x*y)=y\wedge x=x\wedge y.$$

这样，我们得到

$$x\wedge y=x*Ny=y*Nx, \tag{20}$$

此外，由（20）我们有：

$$\begin{aligned}x\vee y=y\vee x&=N(Nx\wedge Ny)=N(Ny\wedge Nx)\\&=N(Ny*NNx)=N(Nx*NNy)\\&=N(Ny*x)=N(Nx*y),\end{aligned} \tag{21}$$

其中第一个等式是由于 $\langle X; \wedge, \vee\rangle$ 是一个格（定理3・11）及格的性质（定理 1・3・19 的 2））。这样，我们就得到下列：

定理 7 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个有界关联的 BCK-代数，则

对于任意的 x，$y\in X$成立：

$$x\wedge y=x*Ny=y*Nx, \tag{20}$$

和

$$x\vee y=y\vee x=N(Nx*y)=N(Ny*x).$$

Q·E·D·

下面我们来讨论有界可换的 BCK-代数，我们有下列：

定理 8 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个有界可换的BCK-代数，则对于任意的 x，y，$z\in X$成立：

$$(x*z)*(y*z)=x*(y\vee z), \tag{21}$$

和

$$Nx*Ny=y*x \tag{22}$$

证 我们先证(22)·由定理3·8的5）及引理3·3我们有

$$Nx*Ny=NNy*x=y*x,$$

这就得到了(22)。

现在我们再来算一下

$$\begin{aligned} z*(x\vee y)&=z*N(Nx\wedge Ny)=NNz*N(Nx\wedge Ny)\\ &=NN(Nx\wedge Ny)*Nz=(Nx\wedge Ny)*Nz\\ &=(Ny*(Ny*Nx))*Nz\\ &=(Ny*Nz)*(Ny*Nx)\\ &=(z*y)*(x*y), \end{aligned}$$

这里我们先后用到了：$\vee$的定义，引理3·3，定理3·8的5），$\wedge$的定义，定理1·5及（22）．这样，我们就得到了

$$z*(x\vee y)=(z*y)*(x*y),$$

以 x 代 z，y 代 x，z 代 y，则有

$$x*(y\vee z)=(x*z)*(y*z).$$

Q·E·D·

定理 6 指出，有界关联的BCK—代数的每一个元素有一个

余元。但是，对于有界可换的BCK-代数这个结果未必为真。然而，我们可以证明，如果有余元，则必唯一，即有下列：

定理9 如果在一个有界可换的BCK-代数〈X；$*$，0〉中元素 $x\in X$ 有余元，则它的余元是唯一的。

证 设 y 和 y' 是 x 的两个余元，则

$$x\wedge y=0,\ x\vee y=1;\ x\wedge y'=0,\ x\vee y'=1.$$

于是

$$y*(y*x)=x\wedge y=0.$$

因此，

$$y\leqslant y*x.$$

另一方面，由定理1·6的3）有

$$y*x\leqslant y.$$

故 $y=y*x$，同理 $y'=y'*x$。

现在计算

$$y*y'=(y*x)*(y'*x)=y*(y'\vee x)=y*1=0,$$

其中第二个等式是由于(21)。同理可得 $y'*y=0$。由 BCK-代数的定义中的公理(Ⅴ)知 $y=y'$。　　　　Q·E·D·

下面介绍格论中的一个概念。

定义3 如果具有单位元的一个格的每个元素恰有一个余元，这个格被称为是具有唯一余元的，或简称为唯一余元的。

由这个定义及定理9我们立即得到下列：

定理10 任何有余元的有界可换的BCK—代数是对于$\wedge$和$\vee$的一个唯一余元格。　　　　Q·E·D·

5．有界关联性和布尔代数

在本节的最后，我们再转到有界关联的BCK-代数上。我们要证明这样的一个代数是对于$\wedge$，$\vee$和N的一个布尔代数。为

此，我们先介绍一下有关布尔代数的一些基本概念。这些材料也是第一章中有关格论知识的一个补充。有些有关格论的一些结果我们在这里皆不证明，读者可参看〔3，7〕。我们先有下列：

定理11 在任意格中下列诸式成立：

1） $(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\leqslant x\wedge(y\vee z)$， (23)

2） $(x\vee y)\wedge(x\vee z)\leqslant x\vee(x\wedge z)$， (24)

3） 若$z\leqslant x$，则$(x\wedge y)\vee z\leqslant x\wedge(y\vee z)$， (25)

4） $\bigvee_{j=1}^{n}(\bigvee_{j=1}^{m}x_{ij})\leqslant\bigwedge_{j=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{n}(x_{ij}))$， (25)

对于一般的格上述四个不等式不能改为等式。对于等式成立的情形，我们介绍下列：

定义4 称条件

$$(x\wedge y)\vee(x\wedge z)=x\wedge(y\vee z) \tag{26}$$

及

$$(x\vee y)\wedge(x\vee z)=x\vee(x\wedge z) \tag{27}$$

为分配律，条件

$$z\leqslant x\Rightarrow(x\wedge y)\vee z=x\wedge(y\vee z) \tag{28}$$

称为模律。

分配律成立的格称为分配格，模律成立的格称为模格。

有下列结果：

定理12 分配格是模格。 Q·E·D·

定理13 分配律（26）和（27）是等价的。

Q·E·D·

现在我们可以给出布尔代数的定义了，即有下列：

定义5 如果一个格〈X；∧，∨〉满足

1）具有最小元0及最大元1。

2）$\forall x\in X$，$\exists x'\in X$，使得

$$x\vee x'=1,\ x\wedge x'=0,$$

则称它是一个有余元格。一个有余元格若满足分配律，则称为Boole（布尔）代数。

我们现在可以给出下列：

定理14 任何有界关联的BCK-代数是一个Boole代数。

证 由于定理6，任何有界关联的BCK—代数$\langle X;*,0\rangle$是一个有余元格。我们再证它满足分配律

首先，由（23）及可换性我们有：

$$(x\wedge z)\vee(y\wedge z)\leqslant(x\vee y)\wedge z.$$

其次，我们作如下计算：由定理7有（及可换性）

$$\begin{aligned}K&=((x\vee y)\wedge z)*((x\wedge z)\vee(y\wedge z))\\&=(N(Ny*x)\wedge z)*((x*Nx)\vee(y*Nz))\\&=(N(Ny*x)*Nz)*N(N(x*Nz)*(y*Nz))\\&=(z*(Ny*x))*N(N(x*Nz)*(y*Nz)),\end{aligned}$$

其中后一等式是由于（22）．这样得到

$$\begin{aligned}K&=(z*(Ny*x))*N(N(x*Nz)*(y*Nz))\\&=NN(z*(Ny*x))*N(N(x*Nz)*(y*Nz))\\&=(N(x*Nz)*(y*Nz))*N(z*(Ny*x))\\&=(N(x*Nz)*N(z*(Ny*x)))*(y*Nz)\\&=((z*(Ny*x))*(x*Nz))*(y*Nz)\\&=((N(Ny*x)*Nz)*(x*Nz)*(y*Nz)\\&=((N(Ny*x)*x)*Nz)*(y*Nz)\end{aligned}$$

这后一等式是由于正定关联性的定义而得。进一步地，我们有：

$$\begin{aligned}K&=((N(Ny*x)*Nz)*x)*(y*Nz)\\&=((z*(Ny*x))*x)*(y*Nz)\end{aligned}$$

$$=((z*x)*(Ny*x))*(y*Nz),$$

再根据正定关联性的定义有

$$K=((z*Ny)*x)*(y*Nz)$$
$$=((z*Ny)*(y*Nz))*x$$
$$=0*x$$
$$=0.$$

这里尚需说明一个事实，即

$$(z*Ny)*(y*Nz)=0. \tag{29}$$

我们由定理3·8的5）出发：

$$Nx*y=Ny*x. \tag{30}$$

由（30）我们有

$$(Nx*y)*(Ny*x)=0.$$

在这个等式中命Nz代x，Ny代y，则有(29)。

这样，我们证得

$$K=((x\vee y)\wedge z)*((x\wedge z)\vee(y\wedge z))=0.$$

故

$$(x\vee y)\wedge z\leqslant(x\wedge z)\vee(y\wedge z).$$

结合证明第一步所得到的结果便有

$$(x\wedge z)\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge z$$

于是$(X, \wedge, \vee)$是一个布尔代数。　　Q·E·D·

我们以有界关联的BCK-代数的一个性质结束本节，即有下列：

定理15　在一个有界关联的BCK-代数〈X；$*$，0〉中对于元素 y 和 $z\in X$ 存在一个最大的元素 x 满足

$$x*y\leqslant z \tag{31}$$

而且x是由$y\vee z$给出的。

证　我们先断言$y\vee z$满足（31）．这是由于

$$
\begin{aligned}
(z\vee y)*y&=N(Nz\wedge Ny)*y\\
&=Ny*(Nz\wedge Ny)\\
&=Ny*(Ny*(Ny*Nz)
\end{aligned}
$$

因为$Ny*Nz\leqslant z*y$（据定理3·8的3)），故$Ny*(z*y)\leqslant Ny*(Ny*Nz)$（据定理1·3的1)），从而$Ny*(Ny*(Ny*Nz))\leqslant Ny*(Ny*(z*y))$，这样就有

$$(z\vee y)*y\leqslant Ny*(Ny*(z*y)).$$

又因为

$$
\begin{aligned}
&(Ny*(Ny*(z*y)))*(1*(1*z))\\
&=((1*y)*(1*(1*z)))*(Ny*(z*y))\\
&=((1*(1*(1*z)))*y)*(Ny*(z*y))\\
&=(NNNz*y)*(Ny*(z*y))\\
&=(Nz*y)*(N(y*z)*y) \qquad \text{（定理3·8的5)）}\\
&=(Nz*N(y*z))*y \qquad \text{（正定关联性）}\\
&=((y*z)*z)*y \qquad \text{（定理8）}\\
&=((y*z)*y)*z\\
&=((y*y)*z)*z\\
&=(0*z)*z\\
&=0,
\end{aligned}
$$

故得

$$(z\vee y)*y\leqslant 1*(1*z)=NNz\leqslant z.$$

下面我们来证明：若x满足$x*y\leqslant z$，则$x\leqslant z\vee y=y\vee z$，我们只要算一下：

$$
\begin{aligned}
x*(z\vee y)&=x*N(Nz\wedge Ny)\\
&=(Nz\wedge Ny)*Nx \qquad \text{（据(20)）}
\end{aligned}
$$

$$= (Ny*(Ny*Nz))*Nx$$
$$= (Ny*Nx)*(Ny*Nz)$$
$$= (x*y)*(z*y) \quad \text{(据(22))}$$
$$= (x*z)*y$$
$$= (x*y)*z = 0,$$

后一等式由于条件$x*y \leq z$。

这就证得满足（31）的x中有一个最大元素$y \vee z$。Q·E·D

§6 具有条件(S)的BCK-代数

在这一节中我们再来讨论一类重要的BCK-代数——具有条件(S)的BCK-代数，已经有许多数学家研究过这一类代数，得到了大量的成果．我们在这里只是向读者介绍一下它的概念及一些基本性质．

1．定义和例子

上一节末我们给出了有界关联的BCK-代数的一个性质，对于任意的y和z，存在满足$x*y \leq z$的最大的x，而且这个最大的x正是$y \vee z$。这样，我们就有必要研究具有这个性质的BCK-代数．1977年K·Iséki就据此引进了具有条件(S)的BCK-代数。

定义1 设〈X；*，0〉是一个BCK-代数．如果对于任意的y和$z \in X$，存在满足条件

$$x*y \leq z \quad (1)$$

的一个最大元素x，那么称它是具有条件(S)的BCK-代数，且记这个最大元素

$$x = y \circ z.$$

注意，实际上这是在具有条件(S)的BCK-代数⟨X；$*$，0⟩中引进了一个二元运算

$$\circ : X\times X\to X,$$

$$(y, z)\mapsto x=y\circ z. \tag{2}$$

我们来看几个例子。

例 1 平凡的BCK-代数是具有条件(S)的。

例 2 有界关联的BCK-代数是具有条件(S)的。特别地，有

例 3 设X是一个非空集合。则⟨$P(X)$；$*$，ϕ⟩是一个有界关联的BCK-代数，因此是具有条件(S)的。在⟨$P(X)$；$-$，ϕ⟩中(1)为

$$A-B\subseteq C, \tag{3}$$

其中A，B，C是X的三个子集。显然，$B\circ C=C-B$。

为了方便起见，我们引进一个记号，即有下列：

定义2 设⟨X；$*$，0⟩是一个BCK-代数。对于任意的a，$b\in X$满足

$$x*a\leqslant b \tag{1}$$

的元素x的集合记为$A(a, b)$

显然，成立下列：

定理 1 对于BCK-代数⟨X；$*$，0⟩中的任何元素a和b，集合A(a，b)是非空的。

证 由于BCK-代数定义中的公理(IV)，$0\in A(a, b)$，故$A(a, b)$非空。 Q.E.D.

定理 2 BCK-代数⟨X；$*$，0⟩是具有条件(S)的当且仅当对于任意的$a, b\in X$，存在$\sup A(a, b)\in X$。

Q.E.D.

现在我们给出一个不具有条件(S)的BCK-代数的例子。

例 4 设$X=\{0, a, b, c, 1\}$，X 中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	c	c	0
b	b	c	0	c	0
c	c	0	0	0	0
1	1	b	a	c	0,

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个 BCK-代数。在这个代数中按其大小可图示如下：

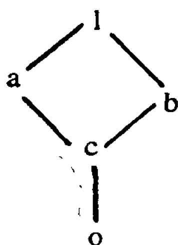


图 2-4

在这个代数中，$A(a, a)=\{0, a, b, c\}$，它没有最大元素。因此，$\langle X; *, 0\rangle$不具有条件(S)。

注意。1°这个代数是有界的，1 是最大元素。

2°这个代数不是正定关联的，因为

$$a*b=c\neq 0=c*b=(a*b)*b.$$

3°这个代数是可换的。

4°这个代数不是关联的。

例 5 设 $X=\{0, a_1, a_2, \cdots, a_n, 1\}$，先在 X 中规定一个序：

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_n<1.$$

然后我们定义X中的二元运算$*$：

$$x*y=\begin{cases} 0, & \text{如果 } x\leqslant y, \\ a_1, & \text{如果 } y<x, \text{ 且 } y\neq 0, \\ x. & \text{如果 } y<x, \text{ 且 } y=0. \end{cases}$$

则$\langle X; *, 0\rangle$是具有条件(S)的BCK-代数。

由这个例子我们可以得到下列：

定理3〔注30〕 存在无穷多个具有条件(S)的BCK-代数。

Q·E·D·

这个定理的证明我们不作了，下面的定理将比定理3更强。在叙述定理4以前，我们再给出一个例子。

例6 设$X=\{0, a\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	a
0	0	0
a	a	0

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数。

$$A(0, 0)=\{0\}, \qquad A(0, a)=\{0, a\},$$

$$A(a, 0)=\{0\}, \qquad A(0, a)=\{0, a\},$$

故 $0\circ 0=0$, $0\circ a=a$, $a\circ 0=0$, $a\circ a=a$。

因此X是具有条件(S)的。

现在我们给出一个比定理3更强的一个结果：

定理4〔注31〕 对于任意的自然数n存在一个元素个数为n的具有条件(S)的BCK-代数。

证 当$n=1$时，由例1给出的$\langle X; *, 0\rangle$即为所求。

当$n=2$时，由例6给出的$\langle X; *, 0\rangle$即为所求。

当$n\geqslant 3$时，由例5给出的$\langle X; *, 0\rangle$即为所求。

Q·E·D·

我们在下面再给出几个例子：

例7 设$X=\{0, a, b, c, d, 1\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

*	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	0	a	0	0
b	b	a	0	b	a	0
c	c	c	c	0	0	0
d	d	c	c	a	0	0
1	1	d	c	b	a	0，

则〈X；＊，0〉是一个具有条件(S)的BCK-代数。这个代数 元素间的序关系可见下图：

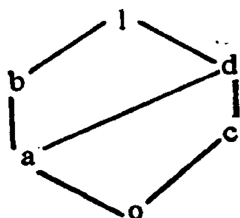


图 2－5

这个代数的运算∘由下表给出：

∘	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	b	b	d	1	1
b	b	b	b	1	1	1
c	c	d	1	c	d	1
d	d	1	1	d	1	1
1	1	1	1	1	1	1。

例8 设 $\gamma=\omega\mu$ 为任一初始序数。命 $X(\gamma)$ 为一切小于或等于 γ 的序数作成的集合。"$\leqslant$"是 $X(\gamma)$ 中序数间的顺序。则 $|X(\gamma)|=\gamma$（或记为 $\aleph_\mu$）。在 $X(\gamma)$ 中定义＊：

$$x * y=\begin{cases}0, & x\leqslant y,\\ 1, & y<x,\ y\neq 0,\\ x, & y<x,\ y=0.\end{cases}$$

则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个基数为γ的BCK-代数．可以算出：

$A(0,\ 0)=\{0\}$，$0\circ 0=0$；

$A(x,\ 0)=A(0,\ x)=\{z\in X(\gamma);\ z\leqslant x\}$，

$x\neq 0$，$x\circ 0=0\circ x=x$；

$A(x,\ x)=X(\gamma)$，$x\neq 0$，$x\circ x=\gamma$；

$A(x,\ y)=X(\gamma)$，x，$y\neq 0$，$x\circ y=\gamma$．

所以，$\langle X(\gamma);\ *,\ 0\rangle$是具有条件(S)的．

注意，例5可看成此例的一个特殊情形．且$X(\gamma)$是有界的，γ是它的单位元．

由例8，我们可以得到下列：

定理5[注32] 对于任意的基数(=初始序数)$\gamma>0$，存在一个基数为γ的具有(S)的BCK-代数．一切具有条件(S)的BCK-代数作成一个类，而不是一个集合(因此是一个真类)。一切具有条件(S)的BCK-代数的类是一切BCK-代数作成的类的一个真子类．

证 第一个结论由例8可知．由第一个结论可知第二个结论成立．由例4知第三个结论成立．　　　　Q·E·D·

我们知道有界关联的BCK-代数皆是具有条件(S)的，即有

有界关联BCK-代数类$\subseteq$具有条件(S)的BCK-代数类．

一个自然的问题是：上面的包含式是否真包含．答案是肯定的，即我们有下列：

定理6[注33] 有界关联BCK-代数类是具有条件(S)的BCK-代数类的一个真子类．

证 例7中BCK-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是具有条件(S)的，但

$$(b*d)*d=a*d=0\neq a=b*d$$

故它不是正定关联的，因而也不是有界关联的。

Q・E・D・

2．具有条件(S)的BCK-代数的基本性质．

我们在这里补充一个抽象代数中的概念。

定义3． 设G是一个非空集合，G中有一个二元运算∘，且满足结合律，则（G，∘）被称为一个半群。如果半群（G，∘）中存在元素e满足：

$$\forall a\in G,\ ae=ea=a, \tag{4}$$

则称之为具有恒等元的半群。

我们有下列结果：

定理7 具有条件(S)的任何BCK—代数$\langle X;*,0\rangle$是关于∘的一个交换的半群，即（X，∘）是一个半群，且$\forall a,b\in X$有$a\circ b=b\circ a$，此外0是这个半群中的一个恒等元。

证 我们分以下几步进行证明。

1）先证交换性，即对于任意的x，$y\in X$，成立

$$x\circ y=y\circ x. \tag{5}$$

这一条本身是具有条件(S)的BCK-代数的一个重要性质。

由运算∘的定义我们有

$$(x\circ y)*x\leqslant y.$$

由定理1·5知

$$(x\circ y)*y\leqslant x,$$

故

$$x\circ y\leqslant y\circ x.$$

将x和y互换一下又有

$$y\circ x\leqslant x\circ y.$$

故得（5）。

2）再证结合律成立。由$\circ$的定义知，对于X中任意三个元素x, y, z有

$$((x\circ y)\circ z)*z\leqslant x\circ y.$$

再由$\circ$的定义知

$$(((x\circ y)\circ z)*z)*y\leqslant x,$$

从而

$$(((x\circ y)\circ z*y)*z\leqslant x.$$

即有

$$((x\circ y)\circ z)*y\leqslant z\circ x=x\circ z.$$

又由$\circ$的定义而有

$$(x\circ y)\circ z\leqslant y\circ(x\circ z)=(x\circ z)\circ y.$$

把y和z互换一下，则有

$$(x\circ z)\circ y\leqslant(x\circ y)\circ z.$$

因此，我们得到

$$(x\circ y)\circ z=(x\circ z)\circ y.$$

利用$\circ$的交换性可有

$$(x\circ y)\circ z=(x\circ z)\circ y=(z\circ x)\circ y=(z\circ y)\circ x=$$
$$=x\circ(z\circ y)=x\circ(y\circ z).$$

3）由1），2）就得到了(X，$\circ$)是一个交换半群。

4）证0是半群（X，$\circ$）的恒等元。事实上，由于对于任意的$x\in X$

$$x*x=0,$$

故

$$x\in A(x, 0)$$

另一方面，若$u\in A(x, 0)$即

$$u * x = 0.$$

则

$$u \leqslant x.$$

故

$$x = \sup A(x,\ 0) = x \circ 0 = 0 \circ x \qquad \text{Q.E.D.} \qquad (7)$$

这个定理有下列:

推论 如果$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是具有条件(S)的有界BCK-代数，那么对于任意的$x \in X$，成立:

$$x \circ 1 = 1 \circ x = 1,\ x \circ Nx = 1. \qquad (8)$$

证 先证第一式。由于

$$(1 * x) * 1 = (1 * 1) * x = 0 * x = 0,$$

故

$$1 * x \leqslant 1,$$

即

$$1 \in A(x,\ 1).$$

因1是X中的最大元，故$_1 = x \circ 1 = 1 \circ x$.

再证第二式。由于$1 * x \leqslant 1 * x = Nx$，故$1 \in A(x,\ Nx)$，从而成立$x \circ Nx = 1$. Q.E.D.

我们进一步有下列:

定理8 具有条件(S)的任何BCK-代数是具有恒等元0的有序的交换半群。

证 只要证有序性。设$\langle x;\ *,\ 0\rangle$是一个具有条件(S)的BCK-代数，$x,\ y,\ z$是X中的任意三个元素，我们要证:

$$x \leqslant y = x \circ z \leqslant y \circ z. \qquad (9)$$

事实上，由于 $x\leqslant y$，据定理1·6的 2），

$$(x\circ z)*y\leqslant(x\circ z)*x,$$

由 ∘ 的定义知，

$$(x\circ z)*x\leqslant z,$$

故

$$(x\circ z)*y\leqslant z,$$

再由 ∘ 的定义就有

$$x\circ z\leqslant y\circ z. \qquad \text{Q·E·D·}$$

具有条件(S)的BCK-代数有一个重要特征性质，它由下列定理给出：

定理9 一个BCK-代数⟨X；∗，0⟩是具有条件(S)的充要条件是X中存在一个二元运算 ∘ 满足

$$(x*y)*z=x*(y\circ z). \qquad (10)$$

证 “⇒”我们就取定义 1 中给出的二元运算，而证明(10)成立。

在证明之前，我们先给出一个引理，它本身也是BCK-代数常用的性质。

引理1 在 BCK-代数⟨X；∗，0⟩中对于任意的元素 x，y，$z\in X$成立：

$$(x*y)*(z*y)\leqslant x*z \qquad (11)$$

证 由BCK-代数定义中的公理 I 知，

$$(x*y)*(x*z)\leqslant z*y,$$

再由定理1·6的 1）便有

$$(x*y)*(z*y)\leqslant x*z. \qquad \text{Q·E·D·}$$

在BCK-代数⟨X；∗，0⟩中对于任意的元素 x，$y\in X$，成立

$$x*(x*y)\leqslant y. \tag{12}$$

现在我们来证明定理 9 的必要性。首先，我们据引理 1 和公理(Ⅰ)有

$$(x*((x*y)*z))*z=(x*z)*((x*y)*z)$$
$$\leqslant x*(x*y)$$
$$\leqslant y.$$

故

$$x*((x*y)*z)\leqslant z\circ y.$$

再由定理1·6的 1 ）有

$$x*(z\circ y)\leqslant(x*y)*z,$$

从而（由可换性）

$$x*(y\circ z)\leqslant(x*y)*z.$$

其次，由公理(Ⅰ)及∘的定义知

$$(x*y)*(x*(y\circ z))\leqslant(y\circ z)*y\leqslant z,$$

再由定理1·6的 1 ）有

$$(x*y)*z\leqslant x*(y\circ z)$$

因此，(10)成立。

"⇐"．设X中存在一个二元运算∘，满足(10)．[注34]

我们先证 $x\circ y$ 满足不等式

$$z*x\leqslant y. \tag{13}$$

事实上，据(10)

$$((x\circ y)*x)*y=(x\circ y)*(x\circ y)=0,$$

故

$$(x\circ y)*x\leqslant y.$$

我们再证：如果z满足(13)，则

$$(z*x)*y=0.$$

另一方面，由(10)知，

$$(z*x)*y=z*(x\circ y),$$

故

$$z*(x\circ y)=0,$$

因此，

$$z\leqslant x\circ y.$$

所以，$x\circ y$是满足（13）的一切z的最大元素。这样，$\langle X;*,0\rangle$是具有条件(S)的。　　Q·E·D·

定理10　如果$\langle X;*,0\rangle$是具有条件(S)的BCK-代数，那么对于任意的x和$y\in X$有

$$x\leqslant x\circ y,\quad y\leqslant x\circ y. \tag{14}$$

证　由(10)我们有

$$(x*x)*y=x*(x\circ y),$$

但是，

$$(x*x)*y=0*y=0,$$

故

$$x*(x\circ y)=0,$$

即

$$x\leqslant x\circ y \tag{15}$$

由定理1·5及(10)我们有（或利用交换律(5)）

$$(x*y)*z=(x*z)*y=x*(z\circ y).$$

从而

$$0=(x*x)*y=x*(y\circ x),$$

此即

$$x\leqslant y\circ x.$$

（此式可直接由(15)利用交换律(5)而得。）上式中交换x与y，可得

$y \leqslant x \circ y$.　　　　　　　　　　Q·E·D·

定理11　在具有条件(S)的任何BCK-代数X中，对于任意的 x，y，$z \in X$ 成立：

$$x * y \leqslant (x * z) \circ (z * y), \tag{16}$$

$$(x \circ y) * (y \circ z) \leqslant x * z \leqslant x \circ z. \tag{17}$$

证　由BCK-代数定义中的公理(Ⅰ)知

$$(x * y) * (x * z) \leqslant z * y,$$

由 $\circ$ 的定义有

$$(x * y) \leqslant (x * z) \circ (z * y).$$

下面我们证(17)。由公理(Ⅱ)知

$$x * (x * y) \leqslant y,$$

故

$$x \leqslant (x * y) \circ y.$$

由定理 8 知

$$x \circ z \leqslant ((x * y) \circ y) \circ z = (x * y) \circ (y \circ z)$$

后一等式是由于结合律(6)。因此，由 $\circ$ 的定义可知

$$(x \circ z) * (y \circ z) \leqslant x * y.$$

在此不等式中以 y 代 z，z 代 y，则有

$$(x \circ y) * (z \circ y) \leqslant x * z.$$

由于交换律(5)，即得

$$(x \circ y) * (y \circ z) \leqslant x * z \leqslant x \leqslant x \circ z,$$

后二不等式是由定理1·6的 3）及定理10知。

Q·E·D·

3．子代数，完备性和局部完备性

我们在这里简单地介绍几个概念。

定义 4　BCK-代数；〈X；$*$，0〉的子集 Y 被称为它的子

代数，如果⟨Y；$*$，0⟩是一个BCK-代数。

BCK—代数的子代数有下列特征：

定理12 BCK-代数⟨X；$*$，0⟩的一个非空子集Y是一个子代数的充要条件是Y对运算$*$封闭。

证 "⇒"显然。"⇐"。由于Y非空，故有$a\in Y$。由于Y对$*$封闭，故

$$0=a*a\in Y.$$

于是，在Y中公理（Ⅰ'）—（Ⅵ）显然成立。所以，⟨Y；$*$，0⟩是一个BCK-代数。 Q·E·D·

本节的最后部分介绍完备性和局部完备性的概念，它们是由J·Ahsan引入的(cf. Math. Sem. Notes, 5 (1977), 419—430)。

定义5 一个BCK-代数⟨X；$*$，0⟩被称为是完备的，如果X的每个子集A有最小的上界，记为sup A。

利用子代数还有局部完备性的概念，即有下列：

定义6 设⟨X；$*$，0⟩是一个BCK-代数。如果X的每个子代数Y在Y中有最小上界，那么X被称为是局部完备的。

对于局部完备的BCK-代数有下列结果：

定理13 任何局部完备的BCK-代数是具有条件（S）的。

证 设⟨X；$*$，0⟩是一个局部完备的BCK—代数，对于任意的a，$b\in X$，我们首先证明$A(a,b)$是X的一个子代数。事实上，设x，$y\in A(a,b)$，即

$$x*a\leqslant b,\quad y*a\leqslant b.$$

那么

$$(x*y)*a=(x*a)*y\leqslant b*y\leqslant b.$$

这里用到了定理1·6的2）及3）。由于

$(x*y)*a\leqslant b$,

即$x*y$也满足不等式$z*a\leqslant b$，故$(x*y)\in A(a, b)$。这就证明了$A(a, b)$对运算$*$的封闭性。由定理12，$\langle A(a, b); *, 0\rangle$是一个子代数。

由于X是局部完备的，故子代数$A(a, b)$中有最小上界，即

$\sup A(a, b)\in A(a, b)$

因此，X是具有条件（S）的。 Q. E. D.

§7 拟可换的BCK-代数

我们在这一节中介绍一类BCK-代数——拟可换的BCK-代数。可换BCK-代数类和正定关联BCK-代数类都是它的真子类。这一类代数是由Hiroshi Yutani在1977年引入的。

1. 多项式$Q_{m,n}(x, y)$

我们先介绍BCK-代数中的一种二元多项式。

定义1 我们以w表示一切非负整数的集合，即

$$w=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}. \qquad (1)$$

定义2 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数。变量x和y（$\in X$）的一个多项式$Q_{m,n}(x, y)$（$m, n\in w$）归纳地定义如下：

$$\left.\begin{aligned}&Q_{0,0}(x, y)=x*(x*y),\\&Q_{m+1,n}(x, y)=Q_{m,n}(x, y)*(x*y),\\&Q_{m,n+1}(x, y)=Q_{m,n}(x, y)*(y*x),\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

注意，1°$Q_{0,0}(x, y)=x*(x*y)$,

$Q_{1,0}(x, y)=(x*(x*y))*(x*y)$,

…………

$$Q_{m,0}(x,y)=\underbrace{(\cdots(}_{m个}(x*\underbrace{(x*y))*(x*y))*\cdots)*(x*y)}_{m个}.$$

对$Q_{0,n}(x, y)$也有类似关系。

2°可否从 $y*(y*x)$或 $y*(x*y)$或$x*(y*x)$开始呢？我们来分析一下，由于

$$y*(y*x)=Q_{0,0}(y, x),$$

故不必从$y*(y*x)$开始。

以$Q'_{0,0}(x, y)$表示 $x*(y*x)$，类 似(2)那样定义 $Q'_{m,n}(x, y)$，这是可以的。$Q'_{0,0}(x, y)$是不同于$Q_{0,0}(x, y)$的，而后产生的 $Q'_{m,n}(x, y)$中有一部分是与 $Q_{m,n}(x, y)$一 样 的。如

$$\begin{aligned}Q'_{1,0}(x, y)&=(x*(y*x))*(x*y)\\&=(x*(x*y))*(y*x)\\&=Q_{0,1}(x, y)\end{aligned}$$

新增的多项式均是如下形状的：

$$x*(y*x),\ (\cdots(x*\underbrace{(y*x))*\cdots)*(y*x)}_{n+1个}$$

而$y*(x*y)=Q'_{0,0}(y, x)$。

例 1　X＝{0, 1}，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1
0	0	0
1	1	0

则$\langle X; *, 0\rangle$是BCK-代数，在这个代数中

$$Q_{0,0}(0, 0)=0*(0*0)=0,$$

$$Q_{0,0}(1, 0)=1*(1*0)=0.$$

$$Q_{0,0}(0,\ 1)=0*(0*1)=0,$$

$$Q_{0,0}(1,\ 1)=1*(1*1)=1*0=1$$

显然，$Q_{m,n}(0,\ 0)=Q_{m,n}(0,\ 1)=Q_{m,n}(1,0)=0$.

$Q_{m,n}(1,\ 1)$的结果如何？留给读者练习。

显然，据定理1·5我们有：

定理 1　在BCK-代数⟨X；∗，0⟩中

$$Q_{m,n}(x,y)=(\cdots(Q_{0,0}(x,y)\underbrace{*(x*y))*\cdots)*(x*y))}_{m}*\underbrace{*(y*x))*\cdots)*(y*x)}_{n}\qquad(3)$$

Q·E·D·

2．拟可换的BCK-代数

我们知道，一个可换的BCK-代数⟨X；∗，0⟩满足$y\wedge x=x\wedge y$，即

$$x*(x*y)=y*(y*x),$$

亦即

$$Q_{0,0}(x,\ y)=Q_{0,0}(y,\ x).\qquad(4)$$

而一个正定关联的 BCK-代数⟨X；∗，0⟩则满足（由定理4.7）

$$(x*(y*x))*(x*y)=(y*(y*x))*(x*y),$$

它又可写为

$$(x*(x*y))*(y*x)=(y*(y*x))*(x*y)$$

即

$$Q_{0,1}(x,\ y)=Q_{0,1}(y,\ x)\qquad(5)$$

作为等式（4）及（5）的一般化，H．Yutani引入了下列概念：

定义 3　设⟨X; ∗, 0⟩是一个BCK-代数，如果在ω中存在四个数i, j, m, n, 使对任意的x, $y \in X$成立

$$Q_{i,j}(m, n) = Q_{m,n}(y, x), \tag{6}$$

则称⟨X; ∗, 0⟩是拟可换的，或详称它为(i, j, m, n)型的拟可换BCK-代数。

显然，我们有下列：

定理 2　可换的BCK-代数是（0, 0; 0, 0）型的拟可换BCK-代数；正定关联BCK-代数是（0, 1; 0, 1）型的拟可换BCK-代数；可换BCK-代数类和正定关联的BCK-代数都是拟可换BCK-代数类的一个真子类。

证　只要证第三个结论，可见下面的例2和例3。

Q·E·D·

例 2　设$X = \{0, a, b, c, d\}$, X中的二元运算∗由下表给出：

∗	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a
b	b	b	0	0	0
c	c	c	c	0	c
d	d	d	b	b	0

则⟨X; ∗, 0⟩是一个BCK-代数。X中的序可图示为：

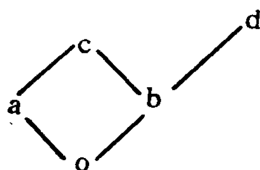


图 2-6

这个代数不是可换的，因为$b*(b*c)=b\neq 0=c*(c*b)$。

这个代数不是正定关联的，因为

$$\left.\begin{array}{l} d*b=b \\ (d*b)*b=0 \end{array}\right\}\Rightarrow d*b\neq(d*b)*b.$$

这个代数是（1，1；1，1）型的拟可换的BCK-代数。

例 3 （Y·Setō）。设M是具有元素0，e的一个无限的半序集，使得

$$0\leqslant x,\qquad \forall x\in M,$$

$$e\leqslant x,\qquad \forall x\in M-\{0\}.$$

M中的二元运算$*$定义为：

$$x*y=\begin{cases}0, & x\leqslant y,\\ x, & y=0,\\ e, & \text{其它}.\end{cases}$$

则$\langle M;*,0\rangle$是一个（1，2；1，2）型的拟可换BCK-代数，但它既不是可换的，又不是正定关联的。

由定理2我们可以画出下列直观图：

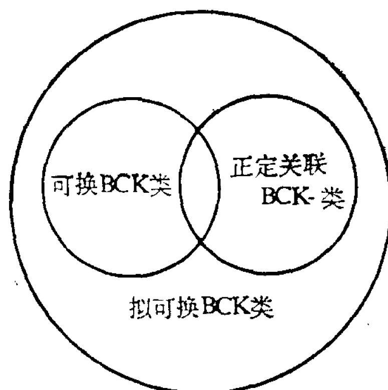


图 2-7

由定理2.3和定理4.4可知成立下列：

定理3〔注35〕 对于任意的基数$\gamma>0$存在一个基数为γ的拟可换的BCK-代数。因此，拟可换BCK-代数类是一个真类。

Q·E·D·

但是，拟可换BCK-代数类的真子类问题并没有解决，即应提出下列：

问题1〔注36〕 拟可换BCK-代数类是BCK-代数类的一个真子类吗？或，存在一个BCK—代数使得它不是拟可换的吗？

在本节的最后我们将介绍一个结果：任何有限的BCK-代数都是拟可换的。因此，如果存在一个BCK-代数，它不是拟可换的，那么它一定基数是无限的。

3．拟可换性的一个特征及簇的概念

我们先介绍拟可换性的一个特征，即有下列：

定理4 （H·Yutani）。一个(2，0)型代数$\langle X;*,0\rangle$是(i,j,m,n)型拟可换BCK-代数的充要条件是它满足以下四个等式：

1） $[(x*y)*(x*z)]*(z*y)=0$ （7）

2） $0*x=0$ （8）

3） $x*0=x$ （9）

4） $Q_{i,j}(x,y)=Q_{m,n}(y,x)$。 （6）

证 “⇒”．这是显然的。

“⇐”．我们分别来证BCK-代数定义中的公理（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅴ）成立。

先证公理（Ⅴ）成立。设

$$x*y=0,\quad y*x=0,$$

则

$$Q_{i,j}(x, y)=x, \qquad Q_{m,n}(y, x)=y.$$

由4），$x=y$。故公理（Ⅴ）成立。

再证公理（Ⅱ）成立。在1）中以0代y，y代z，有

$$((x*0)*(x*y))*(y*y)=0,$$

即有（$y*y=0$在下面再证）

$$(x*(x*y))*0=0.$$

亦即

$$x*(x*y)=0.$$

于是

$$(x*(x*y))*y=0*y=0,$$

这就得到公理（Ⅰ）。

最后证公理（Ⅲ）成立。在1）中以0代y和z，则有

$$\begin{aligned} 0 &= [(x*0)*(x*0)]*(0*0) \\ &= (x*x)*0 \\ &= x*x, \end{aligned}$$

这就得到公理（Ⅲ）。 Q·E·D·

这个定理不仅较简单地表征了拟可换的BCK-代数，而且反映了一切拟可换BCK-代数构成了一个簇——拟可换BCK-代数簇。这里我们要介绍几个泛代数中的概念。

定义 4 设$\mathscr{U}=\{X, \cdots\}$是一个代数类。如果存在一个等式的集合$A=\{Q, \cdots\}$，使A能（等价地）定义$\mathscr{U}$中的每一个代数X，则称$\mathscr{U}$为一个代数簇。

定义 5 设$\mathscr{U}=\{X, \cdots\}$是一个代数类。如果存在一个集合$A=\{P, Q, \cdots\}$，A中的元素除P不是等式外其余皆是等式，使A能（等价地）定义$\mathscr{U}$中的每一个代数X，则称$\mathscr{U}$为一个亚簇。

例 4　一切BCK-代数的类是一个亚簇，称为BCK-代数亚簇。

由定理 4 可知成立下列：

定理 5　一切拟可换的BCK-代数的类是一个簇，称为拟可换BCK-代数簇。　　　　Q.E.D.

我们还有下列结果：

定理 6　可换BCK-代数、正定关联BCK-代数类、关联BCK-代数类分别都是簇，且分别称为可换BCK-代数簇、正定关联BCK-代数簇，关联BCK-代数簇。

证　可换BCK-代数可用（7），（8），（9），（4）予以表征。正定关联BCK-代数可以用（7），（8），（9），（5）及

$$x*y=(x*y)*y \tag{10}$$

表征。关联BCK-代数可以用（7），（8），（9），（4），（5）及（10）表征。　　　　Q.E.D.

4．有限BCK-代数

我们在这里再介绍一下有限BCK-代数的概念及有关它的一个很强的结果。

定义 6　一个有限BCK-代数是元素个数有限的BCK-代数，即当$|X|$为有限时BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$被称为有限的。

前面几节中已出现过许多有限BCK-代数的例子，这里不再重复。下面我们先介绍多项式$Q_{i,j}(x,y)$的一些性质，即有下列：

引理 1 在BCK—代数$\langle X;*,0\rangle$中成立下列诸式：

1）　$i\leqslant m,\ j\leqslant n\Rightarrow Q_{i,j}(x,y)\geqslant Q_{m,n}(x,y)$。

(11)

2) $Q_{i,j}(x, y)*Q_{m,n}(y, x)\leqslant Q_{i-1,j}(x, y)*Q_{m,n-1}(y, x)$.

3) $Q_{i,j}(x, y)*Q_{m,n}(y, x)\leqslant Q_{i,j-1}(x, y)*Q_{m-1,n}(y, x)$ (12)

4) $Q_{i,j}(x, y)\leqslant Q_{0,0}(y, x)$

5) $Q_{i,j}(x, y)\leqslant Q_{0,0}(x, y)$. 当$j\geqslant 1$时。(13)

证 1)的证明，由定义2及定理1.6的3)我们有

$$Q_{m+1,n}(x, y)\leqslant Q_{m,n}(x, y),$$

$$Q_{m,n+1}(x, y)\leqslant Q_{m,n}(x, y).$$

用数学归纳法我们就得到1)。

2)的证明。由定义2及引理6.1我们有：

$$Q_{i,j}(x, y)*Q_{m,n}(y, x)=[(Q_{i-1,j}(x, y)*(x*y)]*(Q_{m,n-1}(y, x)*(x*y))$$

$$\leqslant Q_{i-1,j}(x, y)*Q_{m,n-1}(y, x).$$

3)的证明类似于2)的证明，这里从略。

4)和5)的证明。由BCK–代数的公理2及(11)有

$$Q_{i,j}(x, y)\leqslant Q_{0,0}(x, y)=x*(x*y)\leqslant x*y\leqslant y,$$

$$Q_{i,j}(y, x)\leqslant Q_{0,0}(y, x)=y*(y*x)\leqslant y*x\leqslant x.$$

故由定理1·6的2)有

$$Q_{i,j+1}(x, y)=Q_{i,j}(x, y)*(y*x)\leqslant y*(y*x)=Q_{0,0}(y, x)$$

$$Q_{i,j+1}(y, x)\leqslant Q_{0,0}(x, y)$$

(上式中x与y互换)。

Q·E·D·

现在，我们可以给出下列结果：

定理 7 任何有限BCK-代数是拟可换的。

证 设⟨M；$*$，0⟩是一个有限的BCK-代数。对于任意的a，$b\in$ M，一定存在p，$q\in\omega$，使

$$Q_{p,\,q}(a,\ b)=Q_{p+i,\,q-j}(a,\ b),\ \forall i,\ j\in\omega. \tag{14}$$

否则由于（9）我们能取M的一个严格减小的无限元素列，这与M的有限性矛盾。因为M是有限的，我们能取这样的p和q的极大元m和n。故对于一切x，$y\in$ M和一切i，$j\in\omega$我们有

$$Q_{m,\,n}(x,\ y)=Q_{m+i,\,n+j}(x,\ y).$$

命u，v是ω中的元素，使得m，$n<u$和m，$n<v$。那么

$$Q_{m,\,n}(x,\ y)=Q_{u,\,v}(x,\ y),$$

$$Q_{m,\,n}(y,\ x)=Q_{u,\,v}(y,\ x).$$

由（12）和（13），我们有

$$\begin{aligned}&Q_{m,\,n}(x,\ y)*Q_{m,\,n}(y,\ x)\\&=Q_{u,\,v}(x,\ y)*Q_{m,\,n}(y,\ x)\\&\leqslant Q_{u-n,\,v-m}(x,\ y)*Q_{0,\,0}(y,\ x)\\&=0.\end{aligned}$$

因此

$$Q_{m,\,n}(x,\ y)\leqslant Q_{m,\,n}(y,\ x),$$

交换x和y又有

$$Q_{m,\,n}(y,\ x)\leqslant Q_{m,\,n}(x,\ y).$$

故$Q_{m,\,n}(x,\ y)=Q_{m,\,n}(y,\ x)$，即$M$是$(m,\ n;\ m,\ n)$型拟可换的。

Q·E·D·

§8 BCK-代数的理想

如同于环论中研究理想。在BCK-代数理论中也有理想概念。我们在这一节中介绍BCK-代数的理想理论的一些基本概念和主要结果。

1．理想的概念

对于BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$中的子集，我们曾介绍过初始段$A(x)$，不动点集$N(X)$、对合集$I(X)$、集合$A(a, b)$及子代数等概念，我们在这里再介绍一种子集——理想。

定义1 设A是BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$的一个非空子集。A被称为一个理想，如果

$$0 \in A \tag{1}$$

$$x \in A,\ y * x \in A \Rightarrow y \in A \tag{2}$$

例1 对于任意的BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$，$\{0\}$及X都是理想。

定义2 一个BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$如果除了$\{0\}$及X外再没有别的理想了，则称之为单的。

例2 设$X=\{0, 1\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

*	0	1
0	0	0
1	1	0

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，且是单的BCK-代数。

例3 设$X=\{0, a, b, 1\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	a	0	a	0
b	b	b	0	0
1	1	b	a	0。

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个有界的BCK-代数。它不是单的，因为$A=\{0, a\}$是一个理想。

定义3 BCK-代数的一个理想称为真的，如果它不是整个代数（的基础集）。

定义4 $\{0\}$称为任意的BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$的平凡理想。

为了方便起见，我们给出如下：

定义5 [注37]设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK—代数，以ID(X)表示$\langle X; *, 0\rangle$的一切理想子集作成的集合，称为X的全体理想簇。

由例1知：

$$|ID(X)| \geqslant 2.$$

这里有一个有意思的问题。我们知道，成立：

$$ID(X) \subseteq P(X) \qquad (3)$$

一般地讲，（3）中的包含是真包含。那么，是否存在一个BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$，使

$$|ID(X)| = |P(X)|?$$

这个答案是肯定的，我们有下列结果：

定理1 [注38] 存在BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$使

$$|ID(X)| = |P(X)|. \qquad (4)$$

证 这样的BCK-代数见下列例4. Q·E·D·

例4 设$X=\{0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$是一个可数集。在X中建立一个序关系：

$$0 < a_n, \quad n=1, 2, \cdots.$$

$$a_i\text{与}a_j\text{不可比较}, \quad i\neq j.$$

则(X，≤)是一个半序集，在X中定义一个二元运算$*$如下：

$$x*y=\begin{cases}0, & x\leqslant y,\\ x, & \text{否则},\end{cases}$$

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，且$|P(X)|=2^{\aleph_0}$。

命$X_1=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$。则$|P(X_1)|=|P(X)|$。现任取$X_1$的一个子集$A_1$，则

$$A=\{0\}\cup A_1$$

是X的一个理想。

事实上，如果$A_1=\phi$，则$A=\{0\}$，它是X的一个理想。如果$A_1\neq\phi$，且

$$y\in A, \qquad x*y\in A,$$

由于$*$的定义。

$$x=x*y\in A.$$

此即$x\in A$。故A是X的一个理想

这样，便有

$$|P(X)|\geqslant|ID(X)|\geqslant|P(X_1)|=|P(X)|,$$

故得(4)。 Q·E·D·

由例1及定理1我们可知下列：

定理2〔注39〕 对于任意的BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$成立：

$$2\leqslant|ID(X)|\leqslant|P(X)|, \qquad (5)$$

其中两边不等式中的等号不能除去。 Q·E·D·

下面我们再给出理想的两个简单性质。

定理 3 设A是BCK-代数⟨X; ∗, 0⟩的一个理想，$x\in$ A，$y\leqslant x$，则$y\in$ A，从而理想一定是子代数。

证 因$x\in A$，且

$$y*x=0\in A.$$

而A是一个理想，故$y\in$ A。后一结论因$x*y\leqslant x$而知。

Q·E·D·

定理 4 设⟨X; ∗, 0⟩是一个BCK-代数，每个A(a)是X的一个理想的充要条件是对于任意的x，y，$z\in$ X成立：

$$x*y\leqslant z,\ y\leqslant z\Rightarrow x\leqslant z. \tag{6}$$

证 "⇒"。由于每个A(a)是理想，故A(z)是理想。因

$$x*y\leqslant z,\quad y\leqslant z,\quad z\in A(z).$$

由定理 3 知

$$x*y\in A(z),\ y\in A(z).$$

又因A(z)是理想，从而$x\in$ A(z)，故$x\leqslant z$。

"⇐"。对于任意的$z\in$ X，我们要证A(z)是一个理想。由A(z)的定义知，$0\in A(z)$，设$y\in A(z)$，$x*y\in A(z)$，则

$$x*y\leqslant z,\quad y\leqslant z.$$

由条件（6）知，$x\leqslant z$，即$x\in A(z)$， Q·E·D·

由这个定理的证明可知成立下列：

定理 5〔注40〕 设⟨X; ∗, 0⟩是一个BCK-代数，$z\in$ X，则A(z)是一个理想的充要条件是对于任意的x，$y\in$ X成立（6）。

Q·E·D·

2. 关联理想

在ID(X)中有很重要的一类，称为关联理想。我们先从它的

定义谈起。

定义 6　设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，一个非空子集$A\subseteq X$被称为一个关联理想，如果

$$0\in A, \tag{1}$$

$$(y*x)*z\in A,\quad x*z\in A\Rightarrow y*z\in A. \tag{7}$$

例 5　X是BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$的关联理想。

例 6　在例 4 中给出的BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$中每个理想都是关联的。

$\{0\}$是BCK-代数的关联理想吗？下列定理给出$\{0\}$是关联理想的一个特征。

定理 6　在BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$中，$\{0\}$是关联理想当且仅当每个$A(a)$是一个理想。

证　"$\Rightarrow$"。设$\{0\}$是关联理想。对于任意的$a\in X$，我们要证明$A(a)$是一个理想。显然，$0\in A(a)$。现设

$$y*x\in A(a),\qquad x\in A(a),$$

则

$$y*x\leqslant a,\qquad x\leqslant a.$$

从而

$$(y*x)*a=0,\qquad x*a=0,$$

即

$$(y*x)*a\in\{0\},\ x*a\in\{0\}.$$

因为$\{0\}$是关联理想，故由（7）知，

$$y*a\in\{0\}$$

即

$$y*a=0,$$

故$y\leqslant a$，从而$y\in A(a)$。所以$A(a)$是一个理想。

“$\Leftarrow$”. 设对于任意的 $a\in X$, $A(a)$是一个理想，现证$\{0\}$是关联理想。首先，$0\in\{0\}$。其次，设

$$(y*x)*z\in\{0\}, \qquad x*z\in\{0\},$$

则

$$(y*x)*z=0, \qquad x*z=0.$$

即

$$y*x\leqslant z, \qquad x\leqslant z.$$

由定理4知，$y\leqslant z$，即 $y*z=0$，亦即 $y*z\in\{0\}$，故$\{0\}$是一个关联理想。　　　　Q·E·D·

关联理想是否理想？下列定理给予肯定回答。

定理 7　任何关联理想是一个理想。

证　设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数。A是X的一个关联理想。显然，$0\in A$。现设

$$x*y\in A, \qquad y\in A.$$

则

$$(x*y)*0=x*y\in A, \quad y*0=y\in A.$$

由于A是关联理想，据(7)有

$$x=x*0\in A.$$

故A是一个理想。　　　　Q·E·D·

3. 由子集A生成的理想

我们先给出下列结果：

定理 8[注41]　设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，$\mathcal{G}=\{A_a\subseteq X: a\in I\}$是一个理想的一个簇，则$\cap\mathcal{G}=\cap\{A_a: a\in I\}$是一个理想。

证　由于 $0\in$ 每一个 A_a，故 $0\in\cap\mathcal{G}$。设$x\in\cap\mathcal{G}$，$y*x\in\cap\mathcal{G}$，则对于任意的$a\in I$ 我们有

$$x\in A_\alpha,\qquad y\ast x\in A_\alpha.$$

因A_α是一个理想，故$y\in A_\alpha$。由于$y\in$每一个A_α，$\alpha\in I$，因此$y\in\cap G$，这样，$\cap G$是一个理想。 Q·E·D·

进一步地，对每一个非空子集我们有下列结果：

定理 9〔注42〕 对BCK-代数⟨X；∗，0⟩的每一个非空子集A存在X的一个包含A的（按⊆的）最小理想。

定义 7 BCK-代数⟨X；∗，0⟩中包含A的最小理想，称为由A生成的理想，记为(A〕。当A＝{x}时，可简记为(A〕＝({x}〕＝(x〕。

证定理 9 以G表示包含A的一切理想作成之集，则G非空，因X∈G。命(A〕＝∩G。由定理8，(A〕是一个理想，且由于对于任意的M∈G有A⊆M，故A⊆∩G＝(A〕，再设B是包含A的任一理想，则B∈G，故(A〕⊆B，

Q·E·D·

K．Iséki在1975年就给出了(A〕的构造，即有下列：

定理10 设A是BCK—代数⟨X；∗，0⟩的一个非空子集，则

$$(A] = \{x\in X:\ \exists a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\in A[(\cdots((x\ast a_1)\ast a_2)\ast\cdots)\ast a_n = 0]\}. \qquad (8)$$

证 设

$$B = \{x\in X:\ \exists a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\in A[(\cdots((x\ast a_1)\ast a_2)\ast\cdots)\ast a_n = 0]\} \qquad (9)$$

现证(A〕＝B。

1°0∈B。

因A非空，故$\exists a_1\in A$，则

$$0\ast a_1 = 0,$$

此式表示0满足（9），因此$0\in B$。

2° $A\subseteq B$。

$\forall a\in A$，取$a_1=a\in A$，则有

$$a*a_1=a*a=0,$$

故$a\in B$，从而$A\subseteq B$。

3° B是一个理想。

设$y*x\in B$，$x\in B$。由（9）知，$\exists a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n\in A$，使得

$$(\cdots((y*x)*a_1)*\cdots)*a_m=0 \tag{10}$$

及

$$(\cdots((x*b_1)*b_2)*\cdots)*b_n=0. \tag{11}$$

由（10）可有：

$$(\cdots((y*a_1)*a_2)*\cdots)*a_m)*x=0,$$

故

$$(\cdots((y*a_1)*a_2)*\cdots)*a_m\leqslant x.$$

因此

$$(\cdots((y*a_1)*a_2)*\cdots)*a_m)*b_1\leqslant x*b_1$$

同样地做便有

$$(\cdots((y*a_1)*a_2)*\cdots)*a_m)*b_1)*\cdots)b_n$$
$$\leqslant(\cdots((x*b_1)*b_2)*\cdots)*b_1=0.$$

故

$$(\cdots((y*a_1)*a_2)*\cdots)*a_m)*b_1)*\cdots)*b_n=0,$$

此即表示$y\in B$。因此B是一个理想。

4° 由1°—3°得出：B是一个包含A的理想，故$(A]\subseteq B$。

5° 设C是包含A的任意一个理想。我们要证明$B\subseteq C$，从而$B=(A]$。

设 $x\in B$，则存在 a_1，a_2，…，$a_n\in A$，使得

$$(\cdots((x*a_1)*a_2)*\cdots)*a_n=0. \tag{12}$$

因为C是一个理想，故 $0\in C$，即有

$$(\cdots((x*a_1)*a_2)*\cdots)*a_n\in C,$$

又因

$$a_n\in A\subseteq C,$$

再由理想的定义知

$$(\cdots((x*a_1)*a_2)*\cdots)*a_{n-1}\in C.$$

继续这样做下去（“层层脱皮”的方法），则得

$$x*a_1\in C,$$

又因 $a_1\in C$，故 $x\in C$。　　Q·E·D·

4．完全关联的BCK-代数

我们在本节的第2部分中介绍了关联理想的概念，并且得到了一个结果：每个关联理想都是理想。但反之不真，反例读者容易举出。然而存在一些BCK-代数，其每个理想都是关联的。如例6给出的BCK-代数。所以，有必要专门来讨论一下这一类代数。为了方便起见，我们给这一类代数起个名字。

定义8〔注43〕 如果一个BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$的每个理想都是关联理想，则称它为完全关联的。

对于完全关联BCK-代数我们有下列结果：

定理11 在一个完全关联BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$中对于一个理想A和任何 $a\in X$，

$$B=\{x\in X: x*a\in A\} \tag{13}$$

是一个理想，而且是包含A和 a 的一个最小理想，即

$$B=(A\cup\{a\}].$$

证 1） $0\in B$，因 $0*a=0\in A$。

2）设 $x*y\in B$，$y\in B$。则

$$(x*y)*a\in A, \qquad y*a\in A.$$

因为A是关联理想，故 $x*a\in A$。从而 $x\in B$（由(13)）。

这样B是一个理想，

3）$A\subseteq B$。因对于任意的 $x\in A$，$x*a\leqslant x\in A$，由定理3，$x*a\in A$，故 $x\in B$，从而 $A\subseteq B$。

4） $a\in B$，因 $a*a=0\in A$。

5） 设C是包含A和 a 的任一理想。对于任意的 $x\in B$，我们有 $x*a\in A$。因此 $x*a\in C$，因为 $a\in C$，且C是一个理想，故 $x\in C$。从而 $B\subseteq C$，这样，便有 $B=(A\cup\{a\}]$。

Q·E·D·

下面我们将证明一个重要结果。

定理12 每个完全关联的BCK-代数都是正定关联的。

证 设 $\langle X;*,0\rangle$ 是任意的一个完全关联的BCK-代数。我们证明在X中成立

$$(x*y)*y=x*y \tag{14}$$

对于任意的 x，$y\in X$。（见定理Ⅱ、4、2）

显然，由定理1．6的3）有

$$(x*y)*y\leqslant x*y.$$

我们只要证

$$x*y\leqslant(x*y)*y$$

就行了。

命

$$I=A((x*y)*y).$$

由于X是完全关联的，故{0}是一个关联理想。由定理6，I是一个理想。又因为X的完全关联性，故I是一个关联理想。这样，由于

$$(x*y)*y\in I,\qquad y*y=0\in I,$$

因此 $x*y\in I$，即

$$x*y\leqslant(x*y)*y \qquad \text{Q·E·D·}$$

检查这个证明我们容易发现，并不必要求X是完全关联的。而只要对于任意的 x（或 x 和 y），$A(x)$（或 $A((x*y)*y)$）皆是关联理想就够了，因此我们有下列：

定理13 如果对于BCK—代数 $\langle x,*,0\rangle$ 中的每个元素 x（或 x 和 y），$A(x)$（或 $A((x*y)*y)$）是一个关联理想，则 $\langle X;*,0\rangle$ 是正定关联的。 Q·E·D·

定理12指出了：

完全关联性⇒正定关联性

那么，相反地，正定关联性能推出完全关联性吗？这个问题的回答是肯定的。

定理14 完全关联性⟺正定关联性，

证 我们只要证明：设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个正定关联的BCK-代数，A是一个理想，我们要证A一定是一个关联理想，即

$$(x*y)*z\in A,\qquad y*z\in A\Rightarrow x*z\in A. \quad (7)$$

因为X是正定关联的，故由定义Ⅰ、4·1知

$$(x*z)*(y*z)=(x*y)*z\in A.$$

由于 $y*z\in A$，且A是一个理想，故 $x*z\in A$，即得(7)。

Q·E·D·

这样，我们又得到了正定关联的一个特征性质，即用理想予以表征。我们可以说，一个正定关联BCK-代数就是一个BCK-代数，其理想皆为关联理想（或满足(7)）。

5．极大理想

定义9 一个理想是极大的，如果它是真的，且它不是X的

任何真理想的一个真子集.

例 7 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个 BCK-代数，但不是有界的. 任取$1\bar{\in}X$，命$X'=X\cup\{1\}$，在X'中定义二元运算$*_1$:

$$x*_1y=\begin{cases}x*y, & x,\ y\in X,\\ 0, & x\in X,\quad y=1,\\ 1, & x=1,\quad y\in X,\\ 0, & x=1,\quad y=1.\end{cases}$$

则$\langle X';\ *_1,\ 0\rangle$是一个 BCK-代数，且X是$X'$的一个极大理想.

对于正定关联BCK-代数的极大理想我们有下列结果:

定理15 设A是一个正定关联BCK-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$的一个极大理想，那么对于任何元素x和$y\in X$，我们有

$$x*y\in A\text{ 或 }y*x\in A. \tag{15}$$

证 1）如果$x\in A$，那么$x*y\leqslant x\in A$，故$x*y\in A$（见定理3）.

2）同样地，如果$y\in A$，则$y*x\in A$.

3）现设$x\bar{\in}A$，$y\bar{\in}A$，且$y*x\bar{\in}A$.（如果$y*x\in A$，则已证得）因为X是正定关联的，由定理14，它是完全关联的，再由定理11,

$$B=\{z\in X:\ z*(y*x)\in A\}$$

是包含A和$y*x$的一个最小理想，即$B=(A\cup\{y*x\}]$. 由于A是极大的，且$y*x\bar{\in}A$. 因此$B=X$. 于是$(x*y)\in B$. 即

$$(x*y)*(y*x)\in A,$$

亦即

$$(x*(y*x))*y\in A.$$

又因

$$(y*x)*y=(y*y)*x=0*x=0\in A,$$

且A是一个关联理想（因X是完全关联性）。故 $x*y\in A$。

Q·E·D·

例7 给我们以启示：$\langle X';*_1,0\rangle$是一个有界的BCK-代数，以1为最大元素，它有一个极大理想X。那么，一般地，一个有界BCK-代数是否一定有极大理想呢？这个问题的回答是肯定的，

定理16[注44] （J·Ahsan和A·B·Thaheem，1977）每个非平凡的有界的BCK-代数至少包含一个极大理想。

在证明这个定理前我们先介绍两个引理。

引理1 一个有界BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$的一个理想A是真的当且仅当$1\bar{\in}A$。

证 “⇐”。显然。

“⇒”。用反证法，设A是X的一个真理想，且$1\in A$。对于任意的$x\in X$，由于$x\leqslant 1$，故$x\in A$(由于定理3)。这样，$A=X$，这与A是真理想的条件矛盾。 Q·E·D·

引理2 一个有界BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$的每个真理想A被包含在一个极大理想中。

证 设E是X的包含A的一切真理想的集合，因为$A\in E$，故E是非空的，E中以$\subseteq$编序，即$(E,\subseteq)$作为一个半序集。设E'是$(E,\subseteq)$的一个全序的非空子集。命

$$L=\cup E', \tag{16}$$

则L是包含A的一个真理想。

下面来验证这个断言

1）$A\subseteq L$。显然。

2）L是一个理想。

首先，$0\in A\subseteq L$。

其次，设$x\in L$和$y*x\in L$。由(16)知，存在$L_1, L_2\in E'$，使

$$x\in L_1,\quad y*x\in L_2.$$

由于E′是全序的，故有

$$L_1\subset L_2 \text{或} L_2\subset L_1.$$

如果$L_1\subset L_2$，那么$x\in L_2$，$y*x\in L_2$，而L_2是一个理想，故$y\in L_2$。从而$y\in L$。

如果$L_2\subset L_1$，同样有$y\in L_2$，从而$y\in L$。

这样，总有$y\in L$。故L是一个理想。

3）L是一个真理想。

因为每个$L'\in E'$是一个真理想，由引理1，$1\bar{\in}L'$。故$1\bar{\in}L$。从而L是一个真理想。

由于L是包含A的一个真理想。故$L\in E$。此外，显然L是E′的上确界（最小上界）。这样，据Zorn引理，存在一个包含A的极大理想。 Q·E·D·

注 这个引理要用到选择公理（的等价命题——Zorn引理）。

定理16的证明。（这个证明要用到选择公理。）

设⟨X；*，0⟩是任意的一个有界BCK-代数，且X非平凡，故{0}是X的一个真理想。由引理2，X中必有一个极大理想。 Q·E·D·

把引理2的证明作适当修改，我们可以得到下列：

定理17 设⟨X；*，0⟩是一个有界的BCK-代数，那么它的每个真关联理想被包含在一个极大的关联理想中。

Q·E·D·

§9 商代数

从一个已知的BCK-代数出发构造新的BCK-代数，这是BCK-代数理论中的一个重要问题。在这一节以前，我们已经见过两个方法：一是定义Ⅱ·6·4中定义了子代数，我们从一个已知的BCK-代数出发找出它的子代数，这些子代数是新的BCK-代数。这是一个“缩小”的途径。另一个是“扩张”的途径，从一个已知的BCK-代数出发，我们加入一些元素，而构造一个新的BCK-代数，并且保持原有元素之间的运算。这种“扩张”的方法，我们也是见过的。例如，在定理Ⅱ·3·4中，我们在原有的BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$中加入一个元素，用上述的“扩张”的方法，构造了一个新的有界BCK-代数，从这一节起，我们还要介绍几种构造新的BCK-代数的方法。在本节中，我们要通过理想，而从一个已知的BCK-代数出发构造一个称为商代数的新代数。我们要证明BCK-代数的商代数仍是一个BCK-代数，还要介绍几个商保持性。

我们先给出下列：

定理1 设$\langle X;*,0\rangle$是一个BCK-代数，A是一个理想。在X中定义一个二元关系～如下：

$$\forall x,\ y\in X,\ x\sim y \quad \text{iff} \quad x*y\in A \text{ 和 } y*x\in A。\tag{1}$$

则～是X中的一个等价关系。

证 1) $\forall x\in X,\ x\sim x$。

事实上，由于A是一个理想，故$0\in A$，从而

$$x*x\in A。$$

由（1）即有 $x\sim x$。

2） $\forall x, y\in X$，$x\sim y\Rightarrow y\sim x$。

事实上，由（1）可知，$x\sim y\Rightarrow x*y\in A$，$y*x\in A$ $\Rightarrow y*x\in A$，$x*y\in A\Rightarrow y\sim x$。

3） $\forall x, y, z\in X$，$x\sim y$，$y\sim z\Rightarrow x\sim z$。

事实上，由（1）知，

$$x\sim y\Rightarrow x*y\in A,\quad y*x\in A,$$

$$y\sim z\Rightarrow y*z\in A,\quad z*y\in A.$$

由BCK-代数的定义中的公理（Ⅰ）知，

$$(x*z)*(x*y)\leqslant y*z.$$

由于 $y*z\in A$，而A是一个理想，由定理8·3知

$$(x*z)*(x*y)\in A$$

又因A是一个理想，且 $x*y\in A$，故 $x*z\in A$。

同理可知，$z*x\in A$，这样，由（1）即知 $x\sim z$。

由1），2），3）知，$\sim$是X中的一个等价关系。

Q·E·D·

下面我们对一个BCK-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 进行讨论，且A是X中的一个理想，而$\sim$是由（1）定义的一个等价关系。

定义1 以 C_x 表示包含 x 的类，以一切 C_x 为元素的集合记为 X/A。称为商集。

定理2 $C_0=A$。

证 设 $x\in A$。由于

$$x*0=x\in A,\quad 0*x=0\in A,$$

故 $x\sim 0$，因此 $x\in C_0$。即 $A\subseteq C_0$。

又设 $x\in C_0$，则 $x\sim 0$，故

$$x=x*0\in A,\qquad 0\in A,$$

而A是理想，从而 $x\in A$。从而 $C_0\subseteq A$。所以，$C_0=A$。

Q・E・D・

定义 2 在商集X/A中定义一个二元运算$*$如下：

$$C_x * C_y = C_{x*y} \tag{3}$$

定理 3 商集X／A中的二元运算$*$是良好定义的。

证 设 x，y，u，$v\in X$，且

$$x\sim u,\quad y\sim v.$$

我们要证

$$C_{x*y}=C_{u*v}$$

或

$$x*y\sim u*v. \tag{4}$$

事实上，由BCK－代数的定义中的公理（I），我们有

$$(x*y)*(x*v)\leqslant v*y\in A,$$

$$(x*v)*(x*y)\leqslant y*v\in A,$$

由于A是一个理想，据定理 8・3 我们有

$$(x*y)*(x*v)\in A,\quad (x*v)*(x*y)\in A.$$

由～的定义（见（1））,我们有

$$x*y\sim x*v.$$

由引理 6・1 及 $x\sim u$ 知，

$$(x*v)*(u*v)\leqslant x*u\in A,$$

$$(u*v)*(x*v)\leqslant u*x\in A,$$

从而

$$(x*v)*(u*v)\in A,\quad (u*v)*(x*v)\in A,$$

故

$$(x*v)\sim(u*v).$$

由于～具有传递性（定理 1），因此$x*y\sim u*v$。 Q・E・D・

现在，我们来证下列重要结果：

定理 4 设〈X；∗，0〉是一个BCK-代数，则〈X/A；∗，C_0〉也是一个BCK-代数，其中A是X的一个理想，X/A中的二元关系∗及C_0的意义如前所述。

定义 3 称〈X／A；∗，C_0〉为BCK—代数〈X；∗、0〉的商BCK—代数，或简称为商代数。

证 我们分以下几步来证。

1）在X／A中定义≤：

$$C_x \leqslant C_y \quad \text{iff} \quad C_x * C_y = C_0 \tag{5}$$

2）$C_0 \leqslant C_x$，即满足公理（Ⅳ），对于每个$x \in X$。

事实上，$C_0 * C_x = C_{0*x} = C_0$，故$C_0 \leqslant C_x$。

3）证满足公理（Ⅴ）。设

$$C_x * C_y = C_y * C_x = C_0.$$

则

$$x * y \sim 0, \quad y * x \sim 0.$$

如果$u \in C_x$，那么$u \sim x$，由于$y \sim y$，故（据定理3）

$$u * y \sim x * y \sim 0$$

从而

$$u * y = (u * y) * 0 \in A.$$

同样地，

$$y * u \sim y * x \sim 0 \Rightarrow y * u \in A.$$

所以，$u \in C_y$，即$C_x \subseteq C_y$。

同理可证$C_y \subseteq C_x$。因此$C_x = C_y$。

4）证满足公理（Ⅲ）。因

$$C_x * C_x = C_{x*x} = C_0,$$

故$C_x \leqslant C_x$。

5）为证满足公理（Ⅰ）及（Ⅱ），先证一个重要的不等式，我们以如下引理给出：

引理 1　$x \leqslant y \Rightarrow C_x \leqslant C_y$。　　（6）

证　因为$x \leqslant y$，故$x * y = 0$，于是

$$C_x * C_y = C_{x*y} = C_0,$$

即有$C_x \leqslant C_y$。

下面继续证明定理4.

6）证满足公理（Ⅰ）。因为由公理（Ⅰ）及引理1我们有

$$\begin{aligned}(C_x * C_y) * (C_x * C_z) &= C_{x*y} * C_{x*z} \\ &= C(x*y)*(x*z) \\ &\leqslant C_{z*y} \\ &= C_z * C_y.\end{aligned}$$

7）证满足公理（Ⅱ）。这是由于

$$C_x * (C_x * C_y) = C_x * C_{x*y} = C_{x*(x*y)} \leqslant C_y.$$

Q.E.D.

下面我们再来看商代数的一些性质。为了方便起见，我们先给出下列：

定义 4〔注43〕　如果BCK-代数〈X；*，0〉具有性质P，而证得商代数〈X／A；*，C_0〉也具有性质P，称P为商保持性或可商性。如果商代数〈X／A；*，C_0〉具有性质P，能证明〈X；*，0〉也具有性质P，称P为逆可商性。

我们现在来看几种可商性。

定义 5〔注44〕　一个BCK-代数〈X；*，0〉的基础集合X的势|X|称为这个代数的基数，记为C(X)．

定理 5〔注45〕　“C(X)≤某一个基数α”是一个可商性。

证 显然，$|X/A|\leqslant|X|$，故$C(X/A)\leqslant C(X)\leqslant\alpha$.

Q·E·D·

定理 6〔注46〕 设$C(X)\leqslant\alpha$，则"$2\leqslant|ID(X)|\leqslant 2^{\alpha}$"是一个可商性。

证 由定理8·2，对于〈X；∗，0〉有

$$2\leqslant|ID(X)|\leqslant|P(X)|\leqslant 2^{\alpha}.$$

而对于〈X/A；∗，0〉有

$$2\leqslant|ID(X/A)|\leqslant|P(X/A)|\leqslant|P(X)|\leqslant 2^{\alpha}$$

Q·E·D·

我们再介绍几个结果。

定理 7 (J·Ahsan和A·B·Thaheem，1977)．有界BCK–代数的每个商代数是有界BCK–代数，即有界性是可商性。

证 设〈X；∗，0〉是一个有界BCK–代数，1是它的单位元。设A是X的任一理想，我们指出C_1是〈X/A；∗，C_0〉中的单位元。实事上，对于任意的$x\in X$我们有：

$$C_x * C_1 = C_{x*1} = C_0,$$

故 $C_x\leqslant C_1$.　　Q·E·D·

定理 8 (J·Ahsan和A·B·Thaheem，1977)。一个可换BCK–代数的每个商代数是可换的，即可换性是一个可商性。

证 设〈X；∗，0〉是一个可换的BCK–代数，A是X的任一理想，则〈X/A；∗，C_0〉是一个BCK–代数．对于X中的任意的x，y，我们有

$$C_y*(C_y*C_x) = C_y*C_{y*x}$$

$$= C_{y*(y*x)}$$

$$= C_x * _{(x*y)} = C_x * C_{x*y}$$

$$= C_x * (C_x * C_y),$$

故有 $C_x \wedge C_y = C_y \wedge C_x$. Q·E·D·

定理 9 （J·Ahsan和A·B·Thaheem, 1977.）正定关联性，或等价地完全关联性，是一个可商性。

证 设〈X；$*$，0〉是一个正定关联的BCK-代数，A是X的任一理想，则〈X／A；$*$，C_0〉是一个BCK—代数，任取X中的两个元素 x 和 y，我们有：

$$(C_x * C_y) * C_y = C_{x*y} * C_y = C_{(x*y)*y}$$

$$= C_{x*y} = C_x * C_y,$$

因此，〈X／A；$*$，C_0〉是正定关联的。 Q·E·D·

作为定理 8 和定理 9 的推论，我们有下列：

定理10[注47] 关联性是一个可商性。 Q·E·D·

在作进一步讨论之前，我们先作如下：

定义 6 设〈X；$*$，0〉是一个BCK—代数，A是X的一个理想，〈X／A，$*$，C_0〉是它的商代数，对于任意的$x \in X$，命

$$P: X \longrightarrow X/A, \qquad (7)$$

$$x \longmapsto C_x,$$

称P为从〈X；$*$，0〉到它的商代数上的典则映射。

典则映射P具有下列性质：

定理11 $P(x*y) = P(x) * P(y)$ （8）

证 $P(x*y) = C_{x*y} = C_x * C_y = P(x) * P(y)$。

Q·E·D·

我们现在来考虑一个问题：〈X；$*$，0〉中的理想与〈X/A，$*$，C_0〉中的理想有什么关系？在给出这个问题的回答前，我们先引进一个概念和几个引理。

定义7[注48] 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，$\varnothing \neq A \subseteq X$，记$ID(X, A)$为$X$中包含A的一切理想所成的集合。

由于$X \in ID(X, A)$，故$ID(X, A)$非空。此外，显然有

$$ID(X, A) \subseteq ID(X) \tag{9}$$

对于$ID(X, A)$我们有下列结果：

定理12[注49] $ID(X, A) = ID(X)$ iff $A = \{0\}$.

Q·E·D·

定理13[注50] 设A是BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$的一个非空子集。在$ID(X, A)$中命

$$\left.\begin{aligned} &Y \wedge Z = Y \cap Z, \\ &Y \vee Z = (Y \cup Z], \ \forall Y, Z \in ID(X, A) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

则$\langle ID(X, A), \wedge, \vee\rangle$是一个格，且$(A)$是最小元，X是最大元。

证 设$Y, Z \in ID(X, A)$，则Y，Z是包含A的理想。由定理8·8，$Y \wedge Z = Y \cap Z$是包含A的一个理想。显然，若M是包含A的一个理想，且

$$A \subseteq M \subseteq Y, \qquad A \subseteq M \subseteq Z.$$

那么$A \subseteq M \subseteq Y \cap Z = Y \wedge Z$。又由定理8·9知，$Y \vee Z$是包含A的且包含$Y \cup Z$的最小理想。由格的定义I·3·13知，$\langle ID(X, A), \wedge, \vee\rangle$是一个格。后一结论是自明的。 Q·E·D·

下面我们讨论A本身是一个理想的情形。

引理2 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，A是X的一个理想，$\langle X/A; *, C_0\rangle$是商代数。设$J \in ID(X, A)$，则

$$J/A = \{C_x : x \in J\} \tag{11}$$

是X/A中的一个理想。

证 由于J是一个理想，故$0 \in J$。因此$C_0 \in J/A$. 设$C_x \in J/A$，且$C_y * C_x \in J/A$，那么

$$C_x \in J/A, \qquad C_{y*x} \in J/A.$$

故

$$x \in J, \qquad y * x \in J.$$

由于J是一个理想，因此$y \in J$，从而$C_y \in J/A$。　　Q・E・D・

检查这个证明，我们不难发现，我们并没有用到“$A \subseteq J$”这个条件，因此我们可有下列：

引理3[注51]　设A是BCK-代数$\langle X; *0\rangle$的一个理想，$\langle X/A; *, C_0\rangle$是商代数。如果J是X的一个理想，即$J \in ID(X)$，$J/A$由（11）给出，则$J/A$是$X/A$中的一个理想。

Q・E・D・

引理4　在引理2的条件下，命

$$\left.\begin{array}{l} P: ID(X, A) \longrightarrow ID(X/A) \\ \quad J \longrightarrow J/A \end{array}\right\} \qquad (12)$$

则P是1—1映射。

证　设J_1，$J_2 \in ID(X, A)$，且$J_1 \neq J_2$。不妨设$x \in J_1$，$x \notin J_2$。用反证法，设$P(J_1) = P(J_2) = J_1/A = J_2/A$。于是$\exists y \in J_2$，使得

$$C_x = C_y,$$

故$x \sim y$。从而

$$x * y \in A \subseteq J_2,$$

而$y \in J_2$，且J_2是一个理想，故$x \in J_2$，这是一个矛盾。

Q・E・D・

引理2指出了，

$$J \in ID(X, A) \Rightarrow P(J) = J/A \in ID(X/A).$$

引理4又指出了，P是1-1的。这就是说，P是从ID(X, A)

到ID(X／A) 的一个单射。那么P是否一个满射、从而是一个双射呢？这个问题的回答是肯定的，我们有下列：

引理 5 设⟨X；$*$，0⟩是一个BCK-代数，A是X的一个理想，⟨X／A；$*$，C_0⟩是商代数。若T是X／A的一个理想，即T∈ID(X／A)。则

$$J=\{x\in X: p(x)\in T\}\in ID(X,\ A), \tag{13}$$

且P(J)＝T。

证 我们分几步来证。

1）先证J是X中的一个理想。

事实上，由于T∈ID(X／A)，便故$C_0\in T$，而$C_0=p(0)$，因此0∈J。再设$x\in J$，$y*x\in J$，则

$$p(x)\in T,\ p(y*x)\in T.$$

由定理11知。

$$p(y)*p(x)=p(y*x)\in T.$$

由于T是一个理想，故$p(y)\in T$。因此$y\in J$。

2）再证A⊆J。由定理2，$C_0=A$。故对于任意的$x\in A$，$x\sim 0$，因此$C_x\sim C_0$，即$p(x)=C_0\in T$，故$x\in J$，因此A⊆J。

3）由1）及2）可知J∈ID(X，A)。

4）最后，由（12），（11）和（13）可知，P(J)＝T。

Q・E・D・

现在，我们可以回答定义7前提出的问题了，即有下列：

定理14[注52] 如果A是BCK-代数⟨X；$*$，0⟩的一个理想，⟨X／A；$*$，C_0⟩是商代数。则（12）中给出的映射P是从集合ID(X，A)到ID(X／A)上的一个双射。

证 由引理2，4和5而得。 Q・E・D・

在本节的最后，作者作一点补充说明：关于“具有条件(S)的

性质”是一个可商性，读者可参看定理Ⅱ·12·15·

§10 BCK-代数的积

利用乘积是构造新代数的又一种方法。我们在这一节中来讨论BCK-代数的乘积问题。

1 BCK-代数的乘积

我们先从两个BCK-代数的笛卡尔积谈起。

定理1 设$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$是两个BCK-代数。命

$$\left.\begin{aligned} &X = X_1 \times X_2,\\ &*:(x_1, x_2)*(y_1, y_2) = (x_1 *_1 y_1, x_2 *_2 y_2),\\ &0 = (0_1, 0_2), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，称为$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$的积BCK-代数，简称积代数。

证 由于$0 \in X$，故X是非空的。下面我们验证$\langle X; *, 0\rangle$满足BCK-代数定义中的六条公理。

1）我们先规定：

$$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2) \text{ iff } (x_1, x_2)*(y_1, y_2) = 0 = (0_1, 0_2). \quad (2)$$

2）验证公理（Ⅱ）成立．

事实上，设(x_1, x_2)是X中任一元素。由于

$$(x_1, x_2)*(x_1, x_2) = (x_1 *_1 x_1, x_2 *_2 x_2) = (0_1, 0_2) = 0,$$

故 $(x_1, x_2) \leqslant (x_1, x_2)$。

3）验证公理（Ⅳ）成立。

事实上，设 (x_1, x_2) 是 X 中任一元素，由于

$$0*(x_1, x_2)=(0_1, 0_2)*(x_1, x_2)=(0_1*_1x_1, 0_2*_2x_2)$$
$$=(0_1, 0_2)=0,$$

故 $0\leqslant(x_1, x_2)$。

4）验证公理（V）成立。

设 (x_1, x_2)，(y_1, y_2) 是 X 中的任二元素，且

$$(x_1, x_2)\leqslant(y_1, y_2), \quad (y_1, y_2)\leqslant(x_1, x_2)$$

那么

$$(x_1, x_2)*(y_1, y_2)=0, \quad (y_1, y_2)*(x_1, x_2)=0.$$

故

$$x_1*_1y_1=0_1, \quad y_1*_1x_1=0_1,$$
$$x_2*_2y_2=0_2, \quad y_2*_2x_2=0_2,$$

从而 $x_1=y_1$，$x_2=y_2$，故 $(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$。

5）验证公理（I）成立

事实上，设 (x_1, x_2)，(y_1, y_2)，(z_1, z_2) 是 X 中的任意三个元素．则

$$((x_1, x_2)*(y_1, y_2))*((x_1, x_2)*(z_1, z_2))*$$
$$((z_1, z_2)*(y_1, y_2))$$
$$=((x_1*_1y_1, x_2*_2y_2)*(x_1*_1z_1, x_2*_2z_2))*$$
$$(z_1*_1y_1, z_2*_2y_2)$$
$$=((x_1*_1y_1)*_1(x_1*_1z_1), (x_2*_2y_2)*_2(x_2*_2z_2))*$$
$$(z_1*_1y_1, z_2*_2y_2)$$
$$=(((x_1*_1y_1)*_1(x_1*_1z_1))*_1(z_1*_1y_1),$$
$$((x_2*_2y_2)*_2(x_2*_2z_2))*(z_2*_2y_2))$$
$$=(0_1, 0_2)$$
$$=0,$$

故

$$((x_1, x_2)*(y_1, y_2))*((x_1, x_2)*(z_1, z_2))$$
$$\leqslant(z_1, z_2)*(y_1, y_2).$$

6）验证公理（Ⅱ）成立。

事实上，设(x_1, x_2)，(y_1, y_2)是X中的任意两个元素。则

$$((x_1, x_2)*((x_1, x_2)*(y_1, y_2)))*(y_1, y_2)$$
$$=((x_1, x_2)*(x_1*_1y_1, x_2*_2y_2))*(y_1, y_2)$$
$$=(x_1*_1(x_1*_1y_1), x_2*_2(x_2*_2y_2))*(y_1, y_2)$$
$$=((x_1*_1(x_1*_1y_1))*y_1, (x_2*_2(x_2*_2y_2))*y_2)$$
$$=(0_1, 0_2)$$
$$=0.$$

从而

$$(x_1, x_2)*((x_1, x_2)*(y_1, y_2))\leqslant(y_1, y_2).$$

Q·E·D·

类似地，我们可以定义任意有限个BCK-代数的积代数。

定理 2 设$\langle X_i, *_i, 0_i\rangle(i=1, 2\cdots,n)$是$n$个BCK-代数。命

$$\left.\begin{aligned}&X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,\\&*:(x_1, x_2, \cdots, x_n)*(y_1, y_2, \cdots, y_n)\\&=(x_1*_1y_1, x_2*_2y_2, \cdots, x_n*_ny_n),\\&0=(0_1, 0_2, \cdots, 0_n),\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

则$\langle X, *, 0\rangle$是一个BCK-代数，称为这n个BCK-代数的积代数。

Q·E·D·

易知，有限个BCK-代数的积代数还可归纳地定义，即有

下列：

定理 3 设$\langle X_i;\ *_i,\ 0_i\rangle(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是$n$个BCK-代数。$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是按（3）定义的积BCK-代数，以$\langle y;\ \overline{*},\ \overline{0}\rangle$表示$\langle X_i,\ *_i,\ 0_i\rangle(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$按（3）定义的积代数，则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是$\langle Y;\ \overline{*},\ \overline{0}\rangle$与$\langle X_n;\ *_n,\ 0_n\rangle$的积代数，其中$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=((x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}),\ x_n)$。

Q. E. D.

当$X_1=X_2=\cdots=X_n$时，记$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=X_1^n$。

我们再来讨论任意个BCK-代数的积代数问题。我们有下列：

定理 4 设$\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle\ (\alpha\in I)$是一族BCK-代数，其中I是指标集。设$X=\Pi\ \{X_\alpha;\ \alpha\in I\}$是一切映射$f$：$I\rightarrow\cup\{X_\alpha:\ \alpha\in I\}$的集合，使得$f(\alpha)\in X_\alpha$。对于任意的$f$，$g\in X$，定义$f*g$为：

$$\left.\begin{aligned}(f*g)(\alpha)=f(\alpha)*_\alpha g(\alpha),\forall\alpha\in I,\\ 0(\alpha)=0\alpha,\ \ \forall\alpha\in I,\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个BCK-代数，称为这一族BCK-代数的积代数。

Q·E·D·

2 可积性

如同于在§9中我们讨论过可商性，我们在这里要讨论一些可积性。

定义 1〔注53〕 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是任意的一族BCK-代数$\{\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle;\ \alpha\in I\}$的积代数，设P是一个BCK-代数的性质。如果每个$\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle$具有性质P，可证积代数$\langle X,*,\ 0\rangle$也具有性质P，称P为一个可积性。反之，若积代数$\langle X;\ *,$

0〉具有性质P，而可证明每个BCK--代数$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$也具有性质P。则称P为逆可积性。

定义 2〔注54〕 在定义1的条件下，如果当$|I|=\aleph_0$时P是一个可积性（逆可积性），则称P为可数可积性（逆可积 性）；而当$|I|<\aleph_0$时P是一个可积性（逆可积 性），则称P为有 限可 积 性（逆可积性）。

下面我们给出几个可积性。

定理 5〔注55〕 “$C(X)\leqslant$某一个 基 数$\alpha\geqslant\aleph_0$是 一个 有 限 可积性。也是有限逆可积性。

证 设$\langle X; *, 0\rangle$是任意的一族BCK—代 数 $\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle: \alpha\in I\}$ 的积代数，其中 $|I|<\aleph_0$。不妨设$\alpha=1, 2, \cdots, n$。由条件知，

如果每个$|X_\alpha|\leqslant\aleph_0$，则$|X|\leqslant\aleph_0$。

如果$|X|\leqslant\aleph_0$，则每个$|X_\alpha|\leqslant\aleph_0$。

故本定理成立。 Q·E·D·

定理 6 〔注56〕可换性是一个可积性，也是一个逆可积性。

证 假设定理4的条件成立。对于任意的$f, g\in X$及任意的$\alpha\in I$，如果每个$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$是可换的，则有

$$\begin{aligned}(f*(f*g))(\alpha) &= f(\alpha)*_\alpha(f*g)(\alpha)\\ &= f(\alpha)*_\alpha(f(\alpha)*_\alpha g(\alpha))\\ &= g(\alpha)*_\alpha(g(\alpha)*_\alpha f(\alpha))\\ &= g(\alpha)*_\alpha(g*f)(\alpha)\\ &= (g*(g*f))(\alpha),\end{aligned}$$

由于α的任意性，故有

$$f*(f*g)=g*(g*f),$$

因此（X；*， 0）是可换的。

设积代数$\langle X; *, 0\rangle$满足可换性。对于任意的$\alpha\in I$，设x_α，y_α是BCK-代数$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$的任意两个元素，取X中的两个元素$f$和$g$，使

$$f(\beta)=\begin{cases}x_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}\qquad g(\beta)=\begin{cases}y_\alpha, & \beta=\alpha.\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha.\end{cases}$$

由于X是可换的，故

$$f*(f*g)=g*(g*f),$$

从而

$$(f*(f*g))(\alpha)=(g*(g*f))(\alpha),$$

于是

$$f(\alpha)*_\alpha(f(\alpha)*_\alpha g(\alpha))=g(\alpha)*_\alpha(g(\alpha)*_\alpha f(\alpha)),$$

即

$$x_\alpha*_\alpha(x_\alpha*y_\alpha)=y_\alpha*_\alpha(y_\alpha*_\alpha x_\alpha).$$

所以，$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$是可换的。由于$\alpha$是任意的，故可换性是一个逆可积性。

定理7 〔注57〕 有界性是一个可积性，也是一个逆可积性。

证 设定理4的条件成立。

1）证有界性是可积性。设对于任意的$\alpha\in I$，$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$都是有界的，且$1_\alpha$是它的单位元。命

$$1: I\longrightarrow \bigcup\{X_\alpha; \alpha\in I\},$$

$$\alpha\longmapsto 1_\alpha.$$

则$1\in X$，且对于任意的$f\in X$，和任意的$\alpha\in I$，有

$$(f*1)(\alpha)=f(\alpha)*_\alpha 1(\alpha)=f(\alpha)*_\alpha 1_\alpha=0_\alpha.$$

故$f*1=0$，从而$f\leqslant 1$。

2）证有界性是逆可积性。设积代数$\langle X; *, 0\rangle$是有界的，1是它的单位元。对于任意的$\alpha\in I$，我们要证$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$是有界的。命

$$I_\alpha = I(\alpha)$$

对于任意的$x_\alpha\in X_\alpha$，命

$$f(\beta)=\begin{cases} x_\alpha, & \beta=\alpha, \\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha, \end{cases}$$

则$f\in X$，于是$f*1=0$，特别地，

$$(f*1)(\alpha)=0(\alpha)=0_\alpha,$$

而 $$(f*1)(\alpha)=f(\alpha)*_\alpha 1(\alpha)=x_\alpha *_\alpha 1_\alpha.$$

故$x_\alpha *_\alpha 1_\alpha = 0_\alpha$，即$x_\alpha\leqslant 1_\alpha$。所以，每个$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$是有界的。

Q·E·D·

有界性的这个结果是很重要的，我们在这里顺便对有界BCK-代数再作一些补充讨论，主要介绍李丹〔45〕中的一些工作，李丹在〔45〕中已证明过两个有界BCK-代数的乘积仍是BCK-代数。因此，如果X表示例3·3中的有界BCK-代数，则$X^2=X\times X$，$X^3=X^2\times X$，…，$X^{n+1}=X^n\times X$，…都是有界的BCK-代数。这样，我们就有下列：

定理 8 （李丹，〔45〕）。存在无穷多个有界BCK—代数.

Q·E·D·

注意，定理2·3·6和定理2·3·7是比这个定理进一步的结果。

现在我们继续进行可积性和逆可积性的讨论，我们有下列结果：

定理 9 [注58] 正定关联性是一个可积性，也是一个逆可积性。

证 假定定理 4 的条件成立。

1）先证正定关联性是一个可积性。设 $\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle$ $(\alpha\in I)$ 都是正定关联的。对于积代数 $\langle X;\ *,\ 0\rangle$ 中的任意的元素 f 和 g，和任意的 $\alpha\in I$，我们有：

$$
\begin{aligned}
((f*g)*g)(\alpha) &= (f*g)(\alpha)*_\alpha g(\alpha)\\
&= (f(\alpha)*_\alpha g(\alpha))*_\alpha g(\alpha)\\
&= f(\alpha)*_\alpha g(\alpha)\\
&= (f*g)(\alpha).
\end{aligned}
$$

故 $(f*g)*g=f*g$，因此X是正定关联的。

2）设积代数是正定关联的，要证对于任意的 $\alpha\in I$，$\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle$ 是正定关联的。设 x_α，y_α 是 X_α 中任意两个元素。命

$$
f(\beta)=\begin{cases} x_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}\qquad g(\beta)=\begin{cases} y_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha.\end{cases}
$$

则 f，$g\in X$。由于X是正定关联的，故

$$(f*g)*g=f*g$$

从而

$$((f*g)*g)(\alpha)=(f*g)(\alpha),$$

即有

$$(f(\alpha)*_\alpha g(\alpha))*_\alpha g(\alpha)=f(\alpha)*_\alpha g(\alpha),$$

故有

$$(x_\alpha*_\alpha y_\alpha)*x_\alpha=x_\alpha*_\alpha y_\alpha,$$

因此．$\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle$ 是正定关联的。　　Q·E·D·

由定理 6、定理 9 及定理 5·1 可知成立下列：

定理10[注59]　关联性是一个可积性，也是一个逆可积性。

Q·E·D·

关于条件(S)有下列结果：

定理11　(K·Iséki，1979)。设$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$都是具有条件(S)的BCK-代数。那么$\langle X; *, 0\rangle$也是具有条件(S)的BCK-代数，其中X，$*$，0由(1)给出。

在证明这个定理之前，我们先给出下列引理：

引理3[注60]　设$\langle X; *, 0\rangle$是BCK-代数$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$的积代数，对于X中的任二元素$(x_1, x_2)$，$(y_1, y_2)$成立：

$$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2) \text{ iff } x_1 \leqslant y_1,\ x_2 \leqslant y_2. \quad (5)$$

证　"⇒"。设$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2)$，则$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = 0$，故

$$(x_1 *_1 y_1,\ x_2 *_2 y_2) = 0 = (0_1,\ 0_2),$$

从而

$$x_1 *_1 y_1 = 0_1 \quad , \quad x_2 *_2 y_2 = 0_2,$$

因此$x_1 \leqslant y_1$，$x_2 \leqslant y_2$，

"⇐"。设$x_1 \leqslant y_1$，$x_2 \leqslant y_2$，因此$x_1 *_1 y_1 = 0_1$，$x_2 *_2 y_2 = 0_2$。于是，

$$(x_1 *_1 y_1,\ x_2 *_2 y_2) = (0_1,\ 0_2) = 0,$$

即

$$(x_1,\ x_2) * (y_1,\ y_2) = 0,$$

所以，$(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2)$。　　　　Q·E·D·

证明定理11　设(x_1, x_2)，(y_1, y_2)是X中的任二元素。A[(x_1, x_2)，(y_1, y_2)]的意义可见定义6·2。

我们断言，$(x_1 \circ y_1, x_2 \circ y_2) \in A((x_1, x_2), (y_1, y_2))$。

实事上，$(x_1\circ y_1,\ x_2\circ y_2)\in X$，且

$$(x_1\circ y_1, x_2\circ y_2)*(x_1,x_2)=((x_1\circ y_1)*_1x_1,\ (x_2\circ y_2)*_2x_2)\leqslant(y_1,\ y_2),$$

后一不等式是因为X_1和X_2皆具有条件（S），故$(x_1\circ y_1)*_1x_1\leqslant y_1$，$(x_2\circ y_2)*_2x_2\leqslant y_2$，再由引理3而知。

我们再断言，如果$(p,\ q)\in A((x_1,\ x_2),\ (y_1,\ y_2))$，则必有$(p,\ q)\leqslant(x_1\circ y_1, x_2\circ y_2)$，事实上，由于$(p,\ q)\in A((x_1,\ x_2),\ (y_1,\ y_2))$，故有

$$(p,\ q)*(x_1,\ x_2)\leqslant(y_1,\ y_2),$$

即

$$(p*_1x_1,\ q*_2x_2)\leqslant(y_1,\ y_2)$$

由引理3知

$$p*_1x_1\leqslant y_1,\ q*_2x_2\leqslant y_2.$$

于是，$p\leqslant x_1\circ y_1$，$q\leqslant x_2\circ y_2$，再由引理3知，$(p,\ q)\leqslant(x_1\circ y_1,\ x_2\circ y_2)$。

这样，我们就证得，在X中对于任意两个元素(x_1,x_2)，(y_1,y_2)，在集合$A((x_1,\ x_2),\ (y_1,\ y_2))$中有最大元素存在，而且

$$(x_1,\ x_2)\circ(y_1,\ y_2)=(x_1\circ y_1,\ x_2\circ y_2).\qquad(6)$$

Q·E·D·

对于一般情形，类似的定理也成立。我们先给出下列：

引理4〔注61〕 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一族BCK-代数$\langle X_\alpha;*_\alpha,\ 0_\alpha\rangle$ $(\alpha\in I)$的积代数，对于X中的任二元素f和g成立：

$f\leqslant g$ iff 对于每个$\alpha\in I$，$f(\alpha)\leqslant g(\alpha)$. （7）

证 “⇒”. 设$f\leqslant g$. 则$f*g=0$. 于是对于任意的$\alpha\in I$有

$$(f * g)(\alpha) = 0(\alpha) = 0_\alpha,$$

即有

$$f(\alpha) *_\alpha g(\alpha) = 0_\alpha,$$

故$f(\alpha) \leqslant g(\alpha)$。

"$\Leftarrow$"．因为对于每个$\alpha \in I$，$f(\alpha) \leqslant g(\alpha)$，即$f(\alpha) *_\alpha g(\alpha) = 0_\alpha$，

从而有

$$(f * g)(\alpha) = f(\alpha) *_\alpha g(\alpha) = 0_\alpha,$$

故$f * g = 0$，即$f \leqslant g$。　　　　Q·E·D·

现在我们给出下列一般结果：

定理12[注62]　设$\langle X; *, 0\rangle$是一族具有条件(S)的BCK-代数$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$的积代数，则$\langle X; *, 0\rangle$也具有条件(S)，而且对于X中的任二元素$f$，$g$有

$$(f \circ g)(\alpha) = f(\alpha) \circ g(\alpha). \tag{8}$$

证　设f，g是X中的任二元素。集合$A(f, g)$的意义见定义6·2，命

$$h(\alpha) = f(\alpha) \circ g(\alpha), \qquad \forall \alpha \in I. \tag{9}$$

由于X_α是具有条件(S)的，故$f(\alpha) \circ g(\alpha) \in X_\alpha$，因此$h \in X$。

我们断言，$h \in A(f, g)$。即要证$h * f \leqslant g$，或$(h * f) * g = 0$. 事实上，对于任意的$\alpha \in I$，我们有

$$\begin{aligned}((h * f) * g)(\alpha) &= (h(\alpha) *_\alpha f(\alpha)) *_\alpha g(\alpha)\\ &= ((f(\alpha) \circ g(\alpha)) *_\alpha f(\alpha)) *_\alpha g(\alpha)\\ &= 0_\alpha = 0(\alpha).\end{aligned}$$

故$(h * f) * g = 0$，于是$h \in A(f, g)$。

我们再断言，如果$K \in A(f, g)$则$K \leqslant h$。事实上，由于$K \in A(f, g)$，故

$$K*f\leq g,$$

即$(K*f)*g=0$，从而对于任意的$\alpha\in I$我们有

$$((K*f)*g)(\alpha)=0_\alpha,$$

故

$$(K(\alpha)*_\alpha f(\alpha))*_\alpha g(\alpha)=0_\alpha,$$

于是由（9）即有

$$K(\alpha)\leqslant f(\alpha)\circ g(\alpha)=h(\alpha).$$

由引理4则有$K\leqslant h$。

这就证得，在$A(f,g)$中存在一个最大元素h，从而

$$f\circ g=h,$$

且

$$(f\circ g)(\alpha)=h(\alpha)=f(\alpha)\circ g(\alpha),\ \forall\alpha\in I\quad Q\cdot E\cdot D\cdot$$

显然，这个结果推广了K. Iséki的定理11. 具有条件(S)的性质是否逆可积性？这个问题的回答是肯定的，即我们有下列：

定理13[注63] 具有条件(S)的性质是一个逆可积性。

证 设$\langle X;*,0\rangle$是一族BCK-代数$\langle X_\alpha;*_\alpha,0_\alpha\rangle(\alpha\in I)$的积代数，且X具有条件(S)。对于任意的$\alpha\in I$，设$x_\alpha$，$y_\alpha$是$X_\alpha$中的任意两个元素，命

$$f(\beta)=\begin{cases}x_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}\qquad g(\beta)=\begin{cases}y_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha.\end{cases}$$

则f，$g\in X$。由于X具有条件(S)，故存在$f\circ g$。

现断言$(f\circ g)(\alpha)\in A(x_\alpha,y_\alpha)$。事实上，由于$f\circ g$的定义有

$$(f\circ g)*f\leqslant g.$$

由引理4

$$((f\circ g)*f)(\alpha)\leqslant g(\alpha),$$

即

$$(f\circ g)(\alpha)*_\alpha f(\alpha)\leqslant g(\alpha)$$

故$(f\circ g)(\alpha)\in A(x_\alpha,\ y_\alpha)$。

再断言：如果$z_\alpha\in A(x_\alpha,\ y_\alpha)$，则$z_\alpha\leqslant(f\circ g)(\alpha)$。由于$z_\alpha\in A(x_\alpha,\ y_\alpha)$，故

$$z_\alpha*_\alpha x_\alpha\leqslant y_\alpha.$$

命

$$h(\beta)=\begin{cases}z_\alpha, & \beta=\alpha.\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha.\end{cases}$$

则$h\in X$，且

$$\begin{aligned}((h*f)*g)(\beta)&=(h(\beta)*_\beta f(\beta))*_\beta g(\beta)\\ &=\begin{cases}0_\beta, & \beta\neq\alpha,\\ (z_\alpha*_\alpha x_\alpha)*_\alpha y_\alpha=0_\alpha, & \beta=\alpha.\end{cases}\end{aligned}$$

故$(h*f)*g=0$，即$h*f\leqslant g$，从而$h\leqslant f\circ g$，再据引理4有

$$z_\alpha=h(\alpha)\leqslant(f\circ g)(\alpha).$$

这就证得$(f\circ g)(\alpha)$是$A(x_\alpha,\ y_\alpha)$中的最大元，且

$$(f\circ g)(\alpha)=f(\alpha)\circ g(\alpha).\qquad Q\cdot E\cdot D\cdot\quad(10)$$

注 同型的拟可换性是一个可积性，也是一个逆可积性。(见定理Ⅳ·1·7)

3．理想

我们在§8中介绍过BCK-代数有关理想的一些概念和结果，在§9我们进一步讨论过$\langle X;\ *,\ 0\rangle$与商代数$\langle X/A;\ *,C_0\rangle$中理想的一些关系。在这里，我们要讨论与积有关的理想问题。

我们先介绍下列：

定理14 (K·Iséki和S·Tanaka，1976)。设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$

是一族 BCK-代数 $\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle(\alpha\in I)$ 的积代数，如果对任意的 $\alpha\in I$，L_α 是 X_α 的理想，则

$$L=\Pi\ \{L_\alpha:\ \alpha\in I\} \tag{11}$$

是X的一个理想。

证 由于L_α是X_α的理想，$\alpha\in I$，故 $0_\alpha\in L_\alpha$，因此 $0\in L$。

设 $f*g\in L, g\in L$. 则对于任意的 $a\in I$有 $(f*g)(\alpha)=f(\alpha)*_\alpha g(\alpha)\in L_\alpha$，$g(\alpha)\in L_\alpha$。从而$f(\alpha)\in L_\alpha$，故$f\in L$。因此L是X的一个理想。 Q·E·D·

定理15. (K·Iséki和S·Tanaka, 1976). 设L是积代数 $\langle X;\ *,\ 0\rangle$ 的一个理想，则L的第 α 个射影

$$L_\alpha=\{f(\alpha)\in X_\alpha:\ f\in L\} \tag{12}$$

是X_α的一个理想。

证 因为 $0\in L$，故 $0_\alpha=0(\alpha)\in L_\alpha$。

设$x_\alpha * y_\alpha\in L_\alpha$，$y_\alpha\in L_\alpha$。定义

$$f(\beta)=\begin{cases}x_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}\qquad g(\beta)=\begin{cases}g_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}$$

则f，$g\in X$，且$f*g\in L$，$g\in L$。$(f*g)\in L$是由于

$$(f*g)(\beta)=\begin{cases}x_\alpha *_\alpha y_\alpha\in L_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta\in L_\beta, & \beta\neq\alpha.\end{cases}$$

由于L是理想，故 $f\in L$。由 (12)，$f(\alpha)=x_\alpha\in L_\alpha$。

Q·E·D·

K·Iséki和S·Tanaka还进一步得到下列：

定理16 设L_α是X_α的一个关联理想，那么$\Pi\ \{L_\alpha:\alpha\in I\}$是积代数X的一个关联理想，反之，如果L是积代数X的一个关联理想，那么L的投影L_α是X_α的一个类联理想。 Q·E·D·

§ 11 BCK-代数的并

BCK-代数理论有几种不同定义的并，其目的都是一样的：为了产生一个新的BCK-代数，我们在这里只介绍一种，称为"不相交"的并，以后我们就简称为并。我们先给出下列：

定理 1 设 $\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle: \alpha\in I\}$ 是一族BCK-代数，其中 I 是一个指标非空集合。如果对于不同的 $i, j\in I$，$X_i\cap X_j=\{0\}$，其中 $0=0_i=0_j$，且定义

$$X=\bigcup\{X_\alpha: \alpha\in I\},$$

$$*: x*y=\begin{cases} x*_\alpha y, & \text{当 } x, y\in \text{同一个} X_\alpha, \\ x, & \text{当 } x, y \text{ 不属于同一个} X_\alpha \end{cases} \quad (1)$$

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个BCX-代数，称为这一族BCK-代数的并代数。

Q·E·D·

对于一般情形，我们有下列：

定理 2 设 $\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle: \alpha\in I\}$ 是一族BCK-代数，其中 I 是一个非空指标集合。命 $(\alpha\in I)$

$$\left.\begin{aligned} X'_\alpha &= \{(x_\alpha, \alpha): x_\alpha\in X_\alpha\}, \\ 0'_\alpha &= (0_\alpha, \alpha), \\ (x_\alpha, \alpha)*'_\alpha(y_\alpha, \alpha) &= (x_\alpha *_\alpha y_\alpha, \alpha), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

则 $\langle X'_\alpha; *'_\alpha, 0'_\alpha\rangle(\alpha\in I)$ 仍是一个 BCK-代数。等置 $0'_\alpha(\alpha\in I)$ 为 0（即把一切 $0'_\alpha$ 视为一类，记为 0；其它元素不变），命

$$X=\bigcup\{X'_\alpha: \alpha\in I\},$$

$$*: x*y=\begin{cases} x*'_\alpha y, & x, y\in \text{同一个} X'_\alpha, \\ x, & \text{否则}, \end{cases} \quad (3)$$

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，且称为BCK-代数族$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle: \alpha\in I\}$的并。 Q·E·D·

这样，以后我们只用讨论定理1条件下的并，并且总是假定$|I|\geqslant 2$，且每个X_α不是平凡的。并代数有下列性质：

定理3 设$\langle X; *, 0\rangle$是$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0\rangle: \alpha\in I\}$的并代数。如果$x, y$是X的两个不相等的非零元素，且$x\in X_\alpha$，$y\in X_\beta$。$\alpha\neq\beta$，那么$x$与$y$不可比较。

证 因$x*y=x\neq 0$，$y*x=y=\neq 0$。

Q·E·D·

类似于可商性和可积性、逆可商性和逆可积性，这里也有可并性和逆可并性的概念。

定义1〔注64〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle: \alpha\in I\}$的并代数。如果每个$X_\alpha$具有性质P，能证明X也具有性质P，则称P为一种可并性。相反地，如果并代数X具有性质P，能证明每个$X_\alpha(\alpha\in I)$也具有性质P，则称P为一种逆可并性。

类似地可有可数可并性和有限可并性等概念。

我们来看几种可并性和逆可并性，这里只列出几个主要的，其它的性质是否可并性和逆可并性，有兴趣的读者可自行去推导。

定理4 可换性是可并性。也是一种逆可并性。

证 设$\langle X; *, 0\rangle$是$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0\rangle: \alpha\in I\}$的并代数。

1）证可换性是一种可并性。

设x, y是X中的任二元素，如果$x, y\in$同一X_α。那么$x\wedge y=y\wedge x$。现设$x\in X_\alpha$，$y\in X_\beta$，$\alpha\neq\beta$。那么

$$\begin{aligned}x\wedge y&=y*(y*x)=y*y=0=x*x=x*(x*y)\\&=y\wedge x.\end{aligned}$$

2）可换性是逆可并性是显然的。　　Q·E·D·

类似地，有下列：

定理 5　一切X_α是同一型的拟可换BCK-代数当且仅当并代数$\langle X; *, 0\rangle$是同一型的BCK-代数。　Q·E·D·

下面我们再介绍有关理想的几个结果。

定理 6　设$\langle X; *, 0\rangle$是$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle: \alpha\in I\}$的并代数。则每个$X_\alpha$是X的一个理想。　　Q·E·D·

定理7　(K·Iséki和S·Tanaka，1976)。设$\langle X; *, 0\rangle$是$\langle X_1; *_1, 0\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0\rangle$的一个并代数，A是$X_1$的理想，B是$X_2$的一个理想，则$A\cup B$是X的一个理想。

证　显然，$0\in A\cup B$。

设$y\in A\cup B$，$x*y\in A\cup B$。分几种情形讨论之：

1）$y\in A$，$x*y\in A$。这时由于A是X_1的理想，故$x\in A$，从而$x\in A\cup B$。

2）$y\in B$，$x*y\in B$。同样有$x\in B$，从而$x\in A\cup B$。

3）设$x*y\in A$，$y\in B$。

如果$x\in X_2$，则$x*y\in X_2$，因$x*y\leq x$。但$x*y\in A\subseteq X_1$，故

$$x*y=0$$

即$x\leqslant y$，从而$x\in B$(由于B是理想)。于是$x\in A\cup B$。

如果$x\in X_1$，则由并的定义

$$x*y=x\in A.$$

从而$x\in A\cup B$。

4）类似地可证$y\in A$，$x*y\in B$的情形。

这样，我们证得$A\cup B$是X的一个理想。　Q·E·D·

定理 7 的逆是否成立？我们的回答是肯定的，即有下列：

定理 8〔注65〕 设$\langle X;*,0\rangle$是$\langle X_1;*_1,0\rangle$和$\langle X_2;*_2,0\rangle$的并代数．如果C是X的一个理想，则

$$A=C\cap X_1,\ B=C\cap X_2, \tag{4}$$

分别是X_1和X_2的理想．

证 显然，$0\in A$．$0\in B$．只要证A是理想．设$x*_1y\in A$，$y\in A$，于是

$$x*y\in C,\ y\in C.$$

由于C是X的一个理想，故$x\in C$．

若$x\in A$，则已得证．如果$x\in B$，那么$x\in X_1$，$x\in X_2$，从而$x=0$，故$x\in A$． Q·E·D·

定理 7 可作如下推广：

定理 9〔注66〕 设$\langle X;*,0\rangle$是$\{\langle X_\alpha;*_\alpha,0\rangle:\alpha\in I\}$的并代数，$A_\alpha(\alpha\in I)$是$X_\alpha$的一个理想，则$A=\cup\{A_\alpha:\alpha\in I\}$是X的一个理想．

证 显然，$0\in A$．

设$x*y\in A$，$y\in A$．分以下几种情形讨论之：

1）如果$x*y\in A_\alpha$，$y\in A_\alpha$，那么由于A_α是一个理想，故$x\in A_\alpha$，从而$x\in A$．（注意，如果$x\bar{\in}X_\alpha$，那么$x*y\bar{\in}A_\alpha$.）

2）如果 1）中那样的A_α不存在，设

$$x*y\in A_\alpha,\ y\in A_\beta,\ \alpha\neq\beta.$$

首先，$x\neq0$，否则$x*y=0\in A_\beta$，与假设矛盾．这样，

如果$x\in X_\alpha$，则由并的定义，$x*y=x\in A_\alpha$，从而$x\in A$．

如果$x\in X_\gamma$，$\gamma\neq\alpha,\gamma\neq\beta$，则$x*y=x\in A_\alpha\subseteq X_\alpha$，故$x=0$，矛盾． Q·E·D·

定理 8 也可作如下推广，其证明是类似的：

定理10〔注67〕设$\langle X;*,0\rangle$是$\{\langle X_\alpha;*_\alpha,0\rangle:\alpha\in I\}$

的并代数，A是X的一个理想，则

$$A_\alpha = A \cap X_\alpha,\quad \alpha \in I, \tag{5}$$

是X_α的一个理想。　　　　Q·E·D·

对于关联理想也有类似结果，例如，有下列：

定理11 (K·Iséki和S·Tanaka，1976) 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是$\langle X_1,\ *_1,\ 0\rangle$和$\langle X_2;\ *,\ 0\rangle$的并代数，A是$X_1$的一个关联理想，B是$X_2$的一个关联理想，则$A\cup B$是X的一个关联理想。

证 我们只要证

$$\left.\begin{array}{l}(x*y)*z\in A\cup B\\ y*z\in A\cup B\end{array}\right\}\Rightarrow x*z\in A\cup B. \tag{6}$$

如果x和y分别属于不同的代数，那么

$$x*y=(x*y)*z\in A\cup B.$$

如果x和y属于同一个代数，不妨设$x\in X_1$，$y\in X_1$。

1）如果$z\in X_1$，那么由于A是关联理想，故$x*z\in A\subseteq A\cup B$。

2）如果$z\in X_2$，$z\overline{\in} X_1$，那么

$$(x*y)*z=x*y\in A,\quad y*x=y\in A.$$

因为A是关联理想，故$x\in A$，又由

$$x*z\leqslant x\Rightarrow x*z\in A\subseteq A\cup B.$$

故总有$x*z\in A\cup B$。　　　　Q·E·D·

§12 同　　态

类似于群的同态、环的同态、格的同态，BCK-代数理论中也有同态概念。两个BCK-代数的同态有多种方式，如$*$-同态、$\wedge$-同态等。我们在这里只介绍$*$-同态，简称为同态。

1．同态的概念

我们先介绍BCK-代数同态的定义。

定义1 设⟨X；$*$，0⟩和⟨Y；$\curlywedge$，0⟩是两个BCK-代数，如果存在一个映射

$$f：X\longrightarrow Y。$$

使得对于任意的x，$y\in X$有

$$f(x*y)=f(x)*f(y)。\qquad (1)$$

则称f为X到Y的一个同态映射，且称X和Y是同态的，记为$X\sim Y$。

如果同态f是到Y上的，则称f为一个满同态。

如果同态f为1－1的，则称f为一个一一同态。

如果同态f是1－1到上的，则称f为一个同构；此时称X与Y同构，记为$X\simeq Y$。

注意，X与Y同态或同构，指的是存在上述的一个同态或同构映射。

例1 设X是基数$\geqslant 2$的一个集合，取X中一个元素为0，一个元素为a。在X中定义一个半序$\leqslant$：$\forall x\in X$，$0\leqslant x$；X中任二非零元素不可比较。X中的二元运算$*$定义为

$$x*y=\begin{cases}0，& x\leqslant y，\\ x，& \text{否则}。\end{cases}$$

则⟨X；$*$，0⟩是一个BCK-代数。

设Y＝｛θ，1｝，Y中的二元运算$\curlywedge$由下表定义：

$\curlywedge$	θ	1
θ	θ	θ
1	1	θ

则⟨Y；$\curlywedge$，θ⟩是一个BCK-代数。

命

$$\left.\begin{array}{l} f: X \longrightarrow X, \\ \quad 0 \longmapsto \theta,\ a \longmapsto 1, \\ \quad x \longmapsto \theta,\ 当\ x \neq 0,\ 1\ 时. \end{array}\right\}$$

则 f 是X到Y上的一个映射。

由于

$$f(0*0)=f(0)=\theta,\ f(0)\curlywedge f(0)=\theta\curlywedge\theta=\theta,$$

$$f(0*a)=f(0)=\theta,\ f(0)\curlywedge f(a)=\theta\curlywedge 1=\theta,$$

$$(x\neq 0,\ a)\ f(0*x)=f(0)=\theta,\ f(0)\curlywedge f(x)=\theta\curlywedge\theta=\theta,$$

$$f(a*0)=f(a)=1,\ f(a)\curlywedge f(0)=1\curlywedge\theta=1,$$

$$f(a*a)=f(0)=\theta,\ f(a)\curlywedge f(a)=1\curlywedge 1=0,$$

$$(x\neq 0,\ a)\ \left\{\begin{array}{l} f(a*x)=f(a)=1,\ f(a)\curlywedge f(x)=1\curlywedge\theta=1, \\ f(x*0)=f(x)=\theta,\ f(x)\curlywedge f(0)=\theta\curlywedge\theta=\theta, \\ f(x*a)=f(x)=\theta,\ f(x)\curlywedge f(a)=\theta\curlywedge 1=\theta, \\ f(x*x)=f(0)=\theta,\ f(x)\curlywedge f(x)=\theta\curlywedge\theta=\theta, \end{array}\right.$$

所以 f 是从X到Y上的一个同态映射，从而X～Y。

显然，当 $|X|=2$ 时，且 $X=\{0,\ a\}$，那么 $X\simeq Y$。

对于BCK-代数的同态和同构我们有下列易知的结果：

定理 1 1°$\langle X;\ *,\ 0\rangle\sim\langle X;\ *,\ 0\rangle$，

2°$\langle X;\ *,\ 0\rangle\sim\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$，$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle\sim\langle Z;\ \varDelta,\ \theta'\rangle$，则$\langle X;\ *,\ 0\rangle\sim\langle Z;\ \varDelta,\ \theta'\rangle$。 Q·E·D·

定理 2 1°$\langle X;\ *,\ 0\rangle\simeq\langle X;\ *,\ 0\rangle$。

2°如果$\langle X;\ *,\ 0\rangle\simeq\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$，则$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle\simeq\langle X;\ *,\ 0\rangle$。

3°如果$\langle X;\ *,\ 0\rangle\simeq\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$，且$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle\simeq\langle Z;\ \varDelta,\ \theta'\rangle$，则$\langle X;\ *,\ 0\rangle\simeq\langle Z;\ \varDelta,\ \theta'\rangle$。 Q·E·D·

由于定理2，“$\simeq$”是一切BCK-代数类中的一个等价关系。由于定理1，1°及定理2，1°我们可以有下列：

定义2 $\langle X; *, 0\rangle$到$\langle X; *, 0\rangle$的同态称为自同态；$\langle X; *, 0\rangle$到$X; *, 0\rangle$的同构称为自同构。

定义3〔注68〕 BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$到BCK-代数$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$的一切同态的集合记为hom$\langle X, *, 0; Y, \curlywedge, \theta\rangle$，在不致于混淆时可简记为hom$\langle X; Y\rangle$。

hom$\langle X; X\rangle$又可简记为hom$\langle X\rangle$，表示一切自同态的集合。

BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$到BCK-代数$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$的一切同构的集合记为Isom$\langle X, *, 0; Y, \curlywedge, \theta\rangle$，在不致于混淆时可简记为Isom$\langle X; Y\rangle$。

Isom$\langle X; X\rangle$又可简记为Isom$\langle X\rangle$，表示一切自同构的集合.

易知，我们有下列结果：

定理3〔注69〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，则Isom$\langle X\rangle$关于同构的复合运算作成一个群。　　Q·E·D·

定理4〔注70〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数。则hom$\langle X\rangle$关于同态的复合运算作成一个有恒等元的半群。　　Q·E·D·

我们在这里再举一个重要的同态的例子，即下列：

定理5 （黄涵，〔46〕。）设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，A是X的一个理想，$\langle X/A; *, C_0\rangle$是它的商代数，P是由定义9．6给出的典则映射：

$$P: X \longrightarrow X/A,$$
$$x \longmapsto Cx, \qquad (2)$$

则P是从X到X／A上的一个同态映射，从而X～X／A。

证 由定理9．11即知。　　Q·E·D·

定理6[注71] 在定理5的条件下，如果A＝{0}，则P是从X到A上的一个同构映射，从而$X\simeq X/A$。

证 只要证（2）中的P是1－1的。设x，y是X中的两个元素，且

$$Cx=Cy$$

故$x\sim y$。由于A＝{0}，由“～”的定义（见定理9·1），

$$x*y=0, \quad y*x=0,$$

由BCK－代数定义中的公理（V）有$x=y$。　　Q·E·D·

2．同态的性质

我们来介绍几个BCK－代数之间同态的性质

定理7 设f是$\langle X; *, 0\rangle$到$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$的一个同态。则

1）$f(0)=\theta$，　　（3）

2）$x\leqslant y\Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$。　　（4）

证 1）因$f(0)=f(0*0)=f(0)\curlywedge f(0)=\theta$。

2）因$x\leqslant y$，故$x*y=0$，从而

$$\theta=f(0)=f(x*y)=f(x)\curlywedge f(y),$$

故$f(x)\leqslant f(y)$。　　Q·E·D·

推论 任何BCK－代数之间的同态是保序的。Q·E·D·

定义4 设f是BCK－代数$\langle X; *, 0\rangle$到$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$的一个同态，称集合

$$\mathrm{Ker}(f)=\{x\in X: f(x)=\theta\} \qquad (5)$$

为同态f的核。

定理8 设f是$\langle X; *, 0\rangle$到$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$的一个同态，则$\mathrm{Ker}(f)$是X的一个理想。

证 由（3）知，$0\in\mathrm{Ker}(f)$。

设$y\in\mathrm{Ker}(f)$，$x*y\in\mathrm{Ker}(f)$。则

$$f(x*y)=\theta.$$

另一方面，

$$f(x*y)=f(x)\curlywedge f(y)=f(x)\curlywedge\theta=f(x),$$

故$f(x)=\theta$，从而$x\in \mathrm{Ker}(f)$。　　　　　　Q・E・D・

定理 9[注72]　设f是$\langle X; *, 0\rangle$到$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$的一个满同态。则$f$是一个同构的充要条件是$\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$。

证　"⇒"。由于f是一个同构，故f是1－1的，因此$\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$。

"⇐"。只要证f是1－1的，设$x_1, x_2\in X$，使

$$f(x_1)=f(x_2)=y\in Y.$$

那么

$$f(x_1*x_2)=f(x_1)\curlywedge f(x_2)=y\curlywedge y=\theta,$$

$$f(x_2*x_1)=f(x_2)\curlywedge f(x_1)=y\curlywedge y=\theta,$$

由于$\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$，故

$$x_1*x_2=x_2*x_1=0,$$

由BCK-代数的定义中的公理（Ⅴ）知$x_1=x_2$。因此f是1—1、满同态，即f是从X到Y上的一个同构。　　　　Q・E・D・

定理10　设f是$\langle X; *, 0\rangle$到$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$的一个同态。如果$\{\theta\}$是Y的一个关联理想，则$\mathrm{Ker}(f)$是X的一个关联理想。

证　我们已知$0\in \mathrm{Ker}(f)$。现设

$$(x*y)*z\in \mathrm{Ker}(f),\quad y*z\in \mathrm{Ker}(f), \qquad (6)$$

要证$x*z\in \mathrm{Ker}(f)$。

由于条件（6），我们有

$$f((x*y)*z)=(f(x)\curlywedge f(y))\curlywedge f(z)=\theta\in\{\theta\}.$$

$$f(y*z)=f(y)\curlywedge f(z)=\theta\in\{\theta\}.$$

因为$\{\theta\}$是关联的，故

$$f(x) \curlywedge f(z) \in \{\theta\}.$$

这样便有

$$f(x*z) = f(x) \curlywedge f(z) = \theta.$$

所以，$x*z \in \mathrm{Ker}(f)$。　　　　　　　　Q·E·D·

3．满同态

我们再介绍几个有关同态的结果，以后，我们为了方便起见，以X_2表示这样的一个BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$，其中$X=\{0, 1\}$，$*$由下表给出：

*	0	1
0	0	0
1	1	0

我们有下列结果：

定理11　设f是从一个BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$到X_2上的一个满同态。则$\mathrm{Ker}(f)$是一个关联的极大的理想。

证　容易验证$\{0\}$是X_2中的一个关联理想（或验证X_2是正定关联的）．由定理10知，$\mathrm{Ker}(f)$是X的一个关联理想。现只需验证$\mathrm{Ker}(f)$是一个极大理想。我们用反证法，假定$\mathrm{Ker}(f)$不是一个极大理想，则存在一个真理想B，使

$$Ker(f) \subset B \subset X.$$

这样，就存在

$$x_1 \in B - \mathrm{Ker}(f),\ x_2 \in X - B,$$

由于x_1，$x_2 \overline{\in} Ker(f)$，故$f(x_1) = f(x_2) = 1$，因此

$$f(x_2 * x_1) = f(x_2) * f(x_1) = 1 * 1 = 0.$$

从而$x_2 * x_1 \in \mathrm{Ker}(f) \subset B$。又因B是一个理想，且$x_1 \in B$，$x_2 * x_1 \in B$，故$x_2 \in B$。矛盾。　　　　　　　　Q·E·D·

定理12 设f是从BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$到BCK-代数$\langle X'; *', 0'\rangle$的一个满同态。那么商代数$\langle X/Ker(f); *, C_0\rangle$同构于$\langle X'; *', 0'\rangle$。

证 由定理8，$Ker(f)$是X中的一个理想，故可构造商代数$\langle X/Ker(f); *, C_0\rangle$。

命

$$g: X/Ker(f) \to X', \qquad (7)$$

$$Cx \longmapsto f(x),$$

我们断言g是一个同构。事实上，我们验证如下：

1）g的确定性，即g是良好定义的。

任取$X/Ker(f)$的一个元素Cx，由于Cx是X的一个子集，故可取$x \in Cx$，命$g(Cx)=f(x)$。如果y也属于Cx，那么$Cx=Cy$，而$g(Cy)=f(y)$。我们要说明$f(x)=f(y)$。由于$x, y \in Cx$，故$y \sim x$，即

$$x*y \in Ker(f), \quad y*x \in Ker(f).$$

因此，

$$f(x*y)=f(x)*'f(y)=0'.$$

$$f(y*x)=f(y)*'f(x)=0'.$$

这样由公理（V）知$f(x)=f(y)$。

2）由1）知g是一个映射。

3）g是一个满映射。

设y是X'中的任一元素。由于f是满的，故存在$x \in X$，使$y=f(x)$。则

$$g: Cx \longmapsto f(x)=y.$$

4）g是一个同态。

设Cx，Cy是$X/Ker(f)$的任意两个元素，由定义9·2

知，

$$g(Cx*Cy)=g(Cx*y)=f(x*y)=f(x)*'f(y)$$
$$=g(Cx)*'g(Cy).$$

5）g是1—1的。

设Cx，$Cy\in X/\mathrm{Ker}(f)$，且

$$g(Cx)=g(Cy)=a$$

即

$$f(x)=f(y)=a.$$

因此

$$f(x*y)=f(x)*'f(y)=a*'a=0',$$
$$f(y*x)=f(y)*'f(x)=a*'a=0'.$$

则

$$x*y\in\mathrm{Ker}(f),\quad y*x\in\mathrm{Ker}(f).$$

即$x\sim y$（见定理9·1），因此$Cx=Cy$。

所以，g是一个同构，从而$X/\mathrm{Ker}(f)\simeq X'$。　　Q·E·D·

定理13　如果f是$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$上的一个满同态，如果X是有界的（可换的、正定关联的或关联的），那么Y亦然。　　Q·E·D·

这个定理是§9中一系列结果的推广。它的证明留给读者。

定理14　设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$，$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$，$\langle Z;\ \Delta,\ \theta'\rangle$都是BCK-代数，且设$h:X\to Y$是一个满同态，$g:X\to Z$是一个同态。如果$\mathrm{Ker}(h)\subseteq\mathrm{Ker}(g)$，那么存在唯一的同态$f:Y\to Z$，使$f\cdot h=g$。

证明这个定理之前，先作如下图示：结果“$f\cdot h=g$”表明，要证明这个图形是一个交换图。

证　我们先构造$f:Y\to Z$。对于任意的$y\in Y$，由于h是满的，

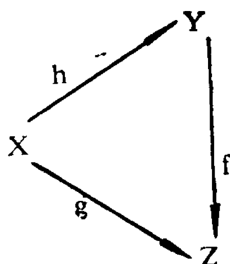


图 2－8

故 $\exists x \in X$，使 $h(x)=y$。设 $z=g(x)$，则命 $f(y)=z$。这样，f是如下一个映射：

$$\left.\begin{array}{l} f: Y \to Z, \\ y \mapsto z=g(x), \quad y=h(x). \end{array}\right\} \qquad (8)$$

我们断言，这个f：Y→Z即为所求。验证于下：

1）f 是良好定义的。

设 $y=h(x_1)=h(x_2)$，x_1，$x_2 \in X$。则

$$h(x_1 * x_2)=h(x_1) \curlywedge h(x_2)=y \curlywedge y=\theta,$$

故 $x_1 * x_2 \in \mathrm{Ker}(h)$。由于 $\mathrm{Ker}(h) \sqsubseteq \mathrm{Ker}(g)$，因此

$$g(x_1) \varDelta g(x_2)=g(x_1 * x_2)=\theta'.$$

从而

$$g(x_1) \leqslant g(x_2).$$

同理有

$$g(x_2) \leqslant g(x_1).$$

因此 $g(x_1)=g(x_2)$。此即表示 f 是良好定义的。

2）$g=fh$。

对于任意的 $x \in X$，设 $y=h(x)$，$z=g(x)$。由 f 的定义知

$$f(y)=z.$$

从而

$$g(x)=z=f(y)=f(h(x)),$$

此即

$$g=fh$$

3）f是一个同态。

设 y_1，$y_2 \in Y$，且$y_1=h(x_1)$，$y_2=h(x_2)$，于是

$$\begin{aligned} f(y_1 \curlywedge y_2) &= f(h(x_1) \curlywedge h(x_2)) = f(h(x_1 * x_2)) = \\ &= g(x_1 * x_2) = g(x_1) \Delta g(x_2) = f(h(x_1)) \Delta \\ &\quad \Delta f(h(x_2)) \\ &= f(y_1) \Delta f(y_2). \end{aligned}$$

4）唯一性

如果存在f_1：$Y \to Z$ 也满足条件，那么对于任意的 $y \in Y$，设

$$f(y)=z, \quad f_1(y)=z_1.$$

设 $y=h(x)$，$x \in X$。那么应有

$$g(x)=fh(x)=z, \quad f_1 h(x)=z_1=g(x).$$

由于g是从X到Z的一个映射，因此$z=g(x)=z_1$。这样，$f=f_1$.

Q·E·D·

具有条件(S)的BCK-代数在同态下有许多性质，据此我们可证（见〔19〕）：

定理15 具有条件(S)的性质是一个可商性。 Q·E·D·

其它结果不一一列举，读者可参看〔19〕。值得一提的是黄涵〔46—47〕中在这一方面做了许多很好的工作。

第三章　BCI-代数的概念及性质

K·Iséki在1966年还引入了比BCK-代数类较为广泛的 BCI-代数。正如作者在第1章§1中指出的那样，BCI-代数理论的发展是在1980年以后。而BCI-代数理论的发展是与一批中国数学工作者投入这一方面的工作分不开的。我们在第三至六章中较为详细地介绍BCI-代数理论。在这一章中，我们将介绍BCI-代数的一些基本概念及主要性质。

§1　BCI-代数的概念

在这一节中我们先介绍BCI-代数的定义及有关的几个概念。

1．BCI-代数的定义

1966年，K·Iséki在引进BCK-代数的同时，也引进了BCI-代数，即有下列：

定义1　设X是一个具有二元运算$*$及一个常元0的集合，如果它满足

公理Ⅰ—1　$((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$，　(1)

公理Ⅰ—2　$(x*(x*y))*y=0$　(2)

公理Ⅰ—3　$x*x=0$，　(3)

公理Ⅰ—4　$x*y=y*x=0\Rightarrow x=y$，　(4)

公理Ⅰ—5　$x*0=0\Rightarrow x=0$，　(5)

则称其为一个BCI-代数，简记为BCI-代数$\langle X;*,0\rangle$，且称

X为它的基础集。

如果命

$$x \leqslant y \quad iff \quad x * y = 0 \tag{6}$$

则等式（1）—（5）可改写为：

$$((x*y)*(x*z)) \leqslant (z*y). \tag{1'}$$

$$x*(x*y) \leqslant y, \tag{2'}$$

$$x \leqslant x \tag{3'}$$

$$x \leqslant y,\ y \leqslant x \Rightarrow x = y, \tag{4'}$$

$$x \leqslant 0 \Rightarrow x = 0. \tag{5'}$$

对比BCK-代数定义中的公理（I）—（V）（为方便起见，以后简记为K—1，K—2，…，K—5），易知，BCI-代数公理包括了公理K—1，K—2，K—3，K—5，而把K—4改为(5)或(5')．对于这一改动，我们要指出：

第一，K—4要求

$0 * x = 0$.

这表明在BCK-代数的乘法表的第一行皆为0．但是，I—5并不作如此要求。这表明一个BCI-代数的乘法表中第一行元素不必全为0．这是BCI-代数与BCK-代数的一个非常重要的差别．

第二，可以发出，由于K—4，我们知道，对于一个BCK-代数来说，

$$0 \leqslant x,\ \forall x \in X,$$

这就是说，0是半序集（X，$\leqslant$）中的最小元。对于一个BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$，尽管我们仍以（6）引入“$\leqslant$”，但是已不能保证0是关系$\leqslant$下的最小元了。I—5指出了，如果$x \leqslant 0$，那么$x = 0$．而完全可能在一个BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$中有元素与0不可比较。

第三，应当说，之所以引入BCI-代数，就是要改动公理K—4为I—5，而这样做就克服了BCK-代数只研究0是最小元这种局限性，而扩大了研究的范围。

第四，公理I—5比公理K—4要弱（在其它四个公理存在的情形下），下列定理就说明了这一点：

定理1 任何BCK-代数都是BCI-代数。

证 设⟨X；∗，0⟩是一个BCK-代数，设$x\in X$，且$x\leqslant 0$，则

$$x*0=0.$$

由K—4又有

$$0*x=0.$$

于是同时有

$$x\leqslant 0,\quad 0\leqslant x.$$

由K—5便有$x=0$。由此得到了I—5。所以，⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数。　　Q.E.D.

由定理1知，

$$\text{BCK-代数类}\subseteq\text{BCI-代数类}. \tag{7}$$

第五，公理I—5比公理K—4真弱，也就是说，(7)中的包含是真包含，或BCI-代数类的范围要比BCK-代数类大。这一点我们在下一个问题中介绍。

2．真BCI-代数

要使(7)中的包含成为真包含，就必须找一个BCI-代数，它不是BCK-代数。对这种BCI-代数，我们先给出下列：

定义2 如果一个BCI-代数⟨X；∗，0⟩不是BCK-代数，则称之为真BCI-代数。

这样，(7)成为真包含的问题就变成了下列：

问题　是否存在一个真BCI-代数?

对于BCI-代数理论来说，这个问题是必须解决的。而且只有肯定地回答这个问题，BCI-代数才能成为一个独立的代数。1980年，K·Iséki首先给出了一个真BCI-代数的例子，从而肯定地回答了上述问题。K·Iséki的例子（见[20]）是下列：

例 1　设X= 0，1，a}，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	a
0	0	0	a
1	1	0	a
a	a	a	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI-代数。以后，我们记这个BCI-代数为$X_3(I, a)$。

我们还可以给出一些简单的真BCI-代数的例子。比如，下列：

例 2　设$X=\{0, 1\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BKI-代数。以后，我们记这个BCI-代数为$X_2(I)$。

例 3　设$X=\{0, 1, 2, 3\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0，

则〈X；*，0〉是一个真BCI-代数。

我们再给出真BCI-代数的一个实际例子。

例 4〔注73〕 设X是一个非空集合，在P（X）中以对称差△为二元运算：

$$A \Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B), \quad (8)$$

则〈P(X)；Δ，$\varnothing$〉是一个真BCI-代数。

我们容易验证，〈P(X)；Δ，$\varnothing$〉满足I—1—I—4，至于I—5，我们可以验证如下：

$$A\triangle\varnothing=\varnothing\Rightarrow(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=\varnothing\Rightarrow \quad A=\varnothing.$$

然而它不满足K－4，因若A$\neq\varnothing$，则

$$\varnothing\Delta A=(\varnothing-A)\cup(A-\varnothing)=A\neq\varnothing,$$

故不必“$\varnothing\leqslant A$”。

我们再返回来看例1。在X_3(I，a)的乘法表中，如果除去a所在列及a所在行，那么剩下的则是BCK-代数X_2的乘法表。因此，可以把X_3(I，a)看作是X_2加入了一个元素a而形成的，或认为在X_2的乘法表上“贴了一个边”而生成的。这种技术称之为BCK-代数“一点扩张”为一个真BCI-代数。K·Iséki指出了这种“一点扩张”技术有它的一般性，即有下列：

定理 2 （K·Iséki，〔20〕）。设〈X；*，0〉是一个BCK-代数，$a\notin$X，命

$$Y = X \cup \{a\},$$

Y中的二元运算$*$定义为：

$$x*y=\begin{cases} x*y, & x,\ y\in X, \\ a, & x\text{与}y\text{中仅有一个是 }a, \\ 0, & x=y=a, \end{cases}$$

则$\langle Y;\ *,\ 0\rangle$是一个真BCI-代数。

证 1）证I－1成立，只用验证（1）的左边含有a的情形，分以下几种情形：

1° 因

$$(x*a)*(x*z)=\begin{cases} 0, & \text{当}x=a,\ z=a;\ \text{当}x\neq a,\ z=a, \\ a, & \text{当}x=a,\ z\neq a;\ \text{当}x\neq a,\ z\neq a, \end{cases}$$

故总有（1）成立。

2° 因

$$(x*y)*(x*a)=\begin{cases} 0, & y=a\text{ 或 }y\neq a,\ x=a; \\ a, & y\neq a\text{ 且 }x\neq a, \end{cases}$$

则仍有（1）成立。

3° 因

$$(a*y)*(a*z)=\begin{cases} 0, & x,\ y\text{ 皆}\neq a\text{ 或 }y=a,\ z=a, \\ a, & y=a,\ z\neq a\text{ 或 }y\neq a,\ z=a, \end{cases}$$

从而仍有（1）成立

4° 显然 $((a*a)*(a*a))*(a*a)=0$.

2）证I－2成立。亦只用验证（2）的左边含有a的情形。

1° 因$a*(a*y)=0$，当$y\neq a$时，故（2）成立。

2° 当$x\neq a$，$y=a$时有$x*(x*a)=a$，亦有（2）成立

3° 当$x=y=a$时，则$(a*(a*a))*a=0$.

3）$I-3$，$I-4$，$I-5$显然成立。

4）由于$0*a=a$，从而K－4不成立，故$\langle Y, *, 0\rangle$是一个真BCI-代数。 Q·E·D·

由定理2我们不难得到：

定理3〔注74〕 一切BCI-代数作成一个真类，以后称之为BCI-代数类。2）BCK-代数类是BCI-代数类的真子类。3）对于基数$\alpha\geqslant 2$，存在一个基数为α的真BCI-代数。4）一切真BCI-代数作成BCI-代数类的一个真子类，称为真BCI-代数类。

证 1）由于BCK-代数类是一个真类，由定理1知，BCI-代数类是一个真类。

2）由例1知，BCK-代数类是BCI-代数类的一个真子类.

3）由于对于任意的基数$\alpha\geqslant 1$，存在一个基数α的BCK-代数，由定理2知，对于$\alpha\geqslant 2$，存在基数为α的一个真BCI-代数.

4）由3）显然得知。 Q·E·D·

3．同态、同构和范畴.

类似于BCK-代数的同态、同构概念（见定义Ⅰ·12·1），我们可定义BCI-代数的同态、同构概念，即有下列：

定义3 设$\langle X; *, 0\rangle$和$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$是两个BCI-代数。如果存在一个映射$f: X\to Y$，使得对于任意的$x, y\in X$有

$$f(x*y)=f(x)\curlywedge f(y), \qquad (9)$$

则称f为X到Y的一个同态映射，且称X和Y是同态的，记为$X\sim Y$。

如果同态f是到Y上的，则称f为一个满同态。

如果同态f是1－1的，则称f为一个一一同态。

如果同态f是1－1到上的，则称f为一个同构；此时称X与

Y是同构的，记为$X\simeq Y$。

类似地，我们有自同态、自同构等概念，hom⟨X⟩和Isom⟨X⟩等记号，以及类似于定理Ⅱ·12·1－4那样的结果[注75]，我们不在这里一一赘述了。

我们关心的一个问题是：一个BCK-代数是否能与一个真BCI-代数同态呢？为了回答这个问题，我们先给出下列：

引理 1[注76] 设f是BCI-代数⟨X；$*$，0⟩到⟨Y，$\curlywedge$，θ⟩的一个同态，则

1）$f(0)=\theta$， (10)

2）$x\leqslant y\Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$。

证明完全同定理Ⅱ·12·7。 Q·E·D·

现在我们来回答上述问题，即有下列：

定理 4[注77] BCK-代数不能与真BCI-代数满同态，即如果f是从BCK-代数，⟨X；$*$，0⟩到一个BCI-代数⟨Y；$\curlywedge$，θ⟩上的满同态，则Y不是真BCI-代数。

证 事实上，设y是Y中的任一元素。由于f是满的，故存在$x\in X$，使$y=f(x)$，由于X是一个BCK-代数，故$0\leqslant x$。由引理1知，

$$\theta=f(0)\leqslant f(x)=y.$$

即Y满足公理K－4，故⟨Y，$\curlywedge$，θ⟩是一个BCK-代数 Q·E·D·

我们也有同态的核的概念，即有下列：

定义 4 设f是BCI-代数⟨X；$*$，0⟩到BCI-代数⟨Y；$\curlywedge$，θ⟩的一个同态，称集合

$$\mathrm{Ker}(f)=\{x\in X：f(x)=\theta\} \tag{11}$$

为同态f的核。

类似于定理Ⅱ·12·9，我们有下列结果：

定理 5〔注78〕 设f是BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到$\langle Y;\ 人,\ \theta\rangle$上的一个同态，则$f$是一个同构的充要条件是$Ker(f)=\{0\}$。

证 注意定理Ⅱ·12·9的证明中没有用到K－4，故也可完全同样地予以证明。 Q·E·D·

与定理Ⅱ·12·14的证明一样，我们可以得到下列：

定理 6〔注79〕 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$，$\langle Y;\ 人,\ \theta\rangle$和$\langle Z;\ \triangle,\ 0'\rangle$是三个BCI-代数，且设$h: X\to Y$是一个满同态，$g: X\to Z$是一个同态。如果$Ker(h)\sqsubseteq Ker(g)$，那么存在唯一的同态$f: Y\to Z$，使$f\cdot h=g$。 Q·E·D·

为了讨论BCK-代数的范畴和BCI-代数的范畴，我们在这里对有关范畴的概念作一些补充介绍。

定义 5 一个范畴C由下列三事物组成：

1）一类对象$\theta(C)$：A，B，…，A，B等称为C的对象，而$\theta(C)$称为C的对象领域。且设$\theta(C)$不是空集。

2）对于对象的有序对（X，Y），有一个态射的集合hom(X,Y)，hom$(X,\ Y)$的元素称为态射，其定义域为X，值域为Y，当$f\in$hom(X,Y)时，记为

$$f: X\to Y\text{或}X\xrightarrow{f}Y.$$

3）对于对象的有序三元组（X，Y，Z)，对应于$f\in$hom$(X,\ Y)$，$g\in$hom$(Y,\ Z)$，有它们的合成

$$gf=gof\in \text{hom}(X,\ Z).$$

C满足下列两条公理：

1° 结合性．若$f\in$hom$(X,\ Y)$，$g\in$hom$(Y,\ Z)$，$h\in$hom$(Z,\ W)$，则

$$h(gf)=(hg)f\in \text{hom}(X,\ W).$$

2° 有么性．对于每个对象Y，存在一个态射 $1_Y \in \hom(Y, Y)$。使得：若 $f \in \hom(X,Y)$，则 $1_Y f = f$；若 $g \in \hom(Y, Z)$、则 $g \circ 1_Y = g$。

显然，对于每个对象 X，1_x 是唯一的，称为单位态射（或恒等态射，么态射）。

例 5 下列皆是范畴的例子：

1）集合 与映射范畴。

2）拓扑空间与连续映射范畴。

3）群与同态范畴。

4）集合与单射（1—1映射）范畴。

5）拓扑空间与同胚映射范畴。

定义 6 范畴S的一个范畴C′是一个范畴，使得

1）C′中的对象均为C的对象。

2）对于C′中对象X′，Y′．

$$\hom C'(X', Y') \subseteq \hom C(X', Y').$$

3）若 $f' \in \hom C'(X', Y')$，$g' \in \hom C'(Y' Z')$，则 f' 与 g' 在 C′ 中的合成等于在C中的合成。

若C′是C的子范畴，则记为C′⊆C。

现在，我们可以介绍下列结果：

定理 7 （K·Iséki，〔20〕）．

1）一切BCK-代数与BCK-代数之间的同态作成一个范畴，称为BCK—范畴。

2）一切BCI-代数，与BCI-代数之间的同态作成一个范畴，称为BCI-代数范畴。

3）BCK-范畴是BCI-范畴的一个子范畴。

证明是一系列显然的验证，这里从略。 Q·E·D·

§ 2　BCI-代数的主要性质

这一节中我们来讨论BCI-代数的一些主要性质，由于BCI-代数的五条公理中有四条与BCK-代数的公理相同，仅把K-4改成了I-5．故BCK-代数理论中凡是没有用K-4证明的那些性质都可以（用同样的方法证明）推广到BCI-代数中；而有些性质的证明显然用到了K-4，但用I-5代替K-4这个证明仍能通过，那么这样的性质也可（用类似的方法证明而）推广到BCI-代数中．这样，我们可有下列结果：

定理 1　在BCI-代数⟨X；$*$，0⟩中成立：

1）　$x\leqslant y\Rightarrow z*y\leqslant z*x,\quad \forall z\in X.$　　（1）

2）　$x\leqslant y,\ y\leqslant z\Rightarrow x\leqslant z.$　　（2）

Q・E・D・

定理 2　如果⟨X；$*$，0⟩是一个BCI-代数，则⟨X，$\leqslant$⟩是一个半序集．　Q・E・D・

下面给出BCI-代数的一个基本性质：

定理 3　（K・Iséki，〔20〕）设⟨X；$*$，0⟩是一个BCI-代数，则对于X中的任意三个元素x，y，z成立：

$$(x*y)*z=(x*y)*y.\qquad (3)$$

Q・E・D・

定理 4　在BCI-代数⟨X；$*$，0⟩中成立：

$x*y\leqslant z\Rightarrow x*z\leqslant y.$　Q・E・D・　（4）

定理 5　在BCI-代数⟨X；$*$，0⟩中成立：

$x\leqslant y\Rightarrow x*z\leqslant y*z,\quad \forall z\in X.$　　（5）

Q・E・D・

注意，定理Ⅱ·1·6的3）不能推广到BCI—代数中，但是定理Ⅱ·1·6的4）可推广到BCI—代数中，不过不能用3），而需要另外证明，我们有下列：

定理6 （K·Iséki）在BCI—代数⟨X；$*$，0⟩中成立：

$$x*0=x, \qquad \forall x\in X. \tag{6}$$

证 对于任意的$x\in X$，由定理3及公理Ⅰ—3我们有

$$(x*0)*x=(x*x)*0=0*0=0. \tag{7}$$

再由公理Ⅰ—2我们有

$$(x*(x*0))*0=0.$$

于是

$$x*(x*0)\leqslant 0.$$

由Ⅰ—5知，

$$x*(x*0)=0. \tag{8}$$

由于成立（7）和（8），据公理Ⅰ—4则有

$$x*0=x. \qquad \text{Q·E·D·}$$

由公理Ⅰ—3及定理6知，BCI—代数⟨X，$*$，0⟩的乘法表如下列形状：

$*$	0	x	$\cdots$	y	$\cdots$
0	0				
x	x	0			
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		
y	y			0	
$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$

注意，定理Ⅱ·4·1也是BCK-代数的一个性质，但是，

它不能推广到BCI-代数中。然而引理Ⅱ·6·1可推广到BCI-代数中，即有下列：

定理7 在BCI-代数⟨X；$*$，0⟩中对于任意的元素$x,y,z\in X$成立：

$$(x*y)*(z*y)\leqslant x*z \qquad Q\cdot E\cdot D\cdot(9)$$

上面给出的BCI-代数的性质皆是从BCK-代数的性质推广而来。应当说明，BCI-代数类真包含了BCK-代数，它保留了BCK-代数的一些性质，当然有些BCK-代数的性质并不能推广到BCI-代数中。然而更重要的，BCI-代数类毕竟是与BCK-代数类不同的，尤其有许多真BCI-代数的出现，必然有BCI-代数的一些本身固有的性质和特点。在一定意义上讲，我们主要地在BCI-代数理论中讨论的正是这些性质和特点。BCI-代数的这些固有的性质和特点，我们将在以后陆续讨论之。在本节的最后，作者介绍一个BCI-代数的等价定义，即有下列：

定理8〔注80〕 设⟨X；$*$，0⟩是(2，0)型的一个代数，则⟨X；$*$，0⟩是一个BCI-代数的充要条件是它满足Ⅰ-1，Ⅰ-3，Ⅰ-4和(3)。

证 “⇒”。这是显然的。“⇐”。只要证满足Ⅰ-2和Ⅰ-5。

证满足Ⅰ-2。因$(x*(x*y))*y=(x*y)*(x*y)=0$。

证满足Ⅰ-5。已知$x*0=0$，欲证$x=0$。由已知条件，$0*x=(x*0)*x=(x*x)*0=0*0=0$。从而由Ⅰ-4知，$x=0$。

Q·E·D·

定理8给出了BCI-代数的一个重要特征。我们以后不仅要

用到它，而且由此将导致我们引入一类新的代数——BCH—代数，详细情形，请参看第七章。

§3 BCI-代数的BCK-代数化

BCI-代数与BCK-代数有什么关系呢？这是研究BCI-代数理论必须考虑的一个问题。在前两节中我们已经在这个问题上做了一些工作，主要有以下几点：

第一，从BCI-代数的定义和BCK-代数的定义来看，仅把公理K-4换成了公理I-5，从这个意义上看，BCI-代数理论是BCK-代数理论的一个推广。

第二，定理1·1指出，任何BCK-代数都是BCI-代数。这就表明

$$\text{BCK-代数类}\subseteq\text{BCI-代数类}.$$

进一步地说清了上述"推广"的真正含意。

第三，真BCI-代数的存在（如例1·1－1·4），尤其我们指出了，对于任何的基数$\alpha\geqslant 2$，存在一个基数为α的真BCI-代数。这说明了BCI-代数类对BCK-代数类的推广有着丰富的内容和深刻的含意。

第四，K·Iséki给出的定理1·2是有趣的。根据这个定理，我们对于任意的一个BCK-代数，可以构造一个真BCI-代数。这个结果，不仅仅反映真BCI-代数的存在性，更重要的是，这种BCK-代数的"一点扩张"的手法深刻地揭示了BCK-代数与真BCI-代数之间的关系。

第五，我们指出了，BCI-代数保留了BCK-代数的那些性质，也破坏了某些性质。

BCI-代数和BCK-代数的关系不只是这一些，本节和以后一些章节我们还将作一些讨论。在本节中我们要考虑另一方面的一个问题：既然BCI-代数是从BCK-代数推广而来，而且BCK-代数是BCI-代数，那么一个BCI-代数在什么情形下又变成一个BCK-代数呢？这种BCI-代数的"BCK化"很类似于拓扑空间的度量化，是一个相当重要的问题。为了便于讨论这个问题，我们先说清楚"BCK-化"的含意。

定义 1〔注81〕 一个BCI-代数在一定的条件下可证明是一个BCK-代数，则称这个BCI-代数可BCK-代数化，或简称为可BCK-化。一个叙述BCI-代数是BCK-代数的结果称为BCK化定理。

显然，满足K-4的BCI-代数是一个BCK-代数。这是一个平凡的BCK化定理。一般地说，BCK化定理的已知条件中并不包括"满足K-4"，而是要证明它满足K-4。K·Iséki在〔20〕中给出几个BCK化定理。

定理 1 (K·Iséki, 〔20〕)。一个BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$如果满足下列条件：对于任意的$x, y\in X$成立

$$x*(x*y)=y*(y*x) \tag{1}$$

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数。

证 我们用反证法，设满足具有(1)的BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI-代数，那么$\exists a\in X$，使得a与0不可比较大小。

我们断言$0*a$亦不能和0比较大小。事实上，如果

$$0\leqslant 0*a. \tag{2}$$

由定理2·1的1）有

$$0*(0*a)\leqslant 0*0=0.$$

由 Ⅰ－5 知，

$$0*(0*a)=0.$$

再由 Ⅰ－1 知

$$0*(0*a)=((0*0)*(0*a))\leqslant a*0=a.$$

后一等式是因为 2・6 而成立的。这样，我们得出：$0\leqslant a$。这与已知"a与 0 不可比较"相矛盾。但由（1）又知（2）成立：$0*(0*a)=a*(a*0)=a*a=0$，从而矛盾。

Q・E・D・

上面这个定理的证明实际上给出了真 BCI－代数的下列性质：

定理 2〔注82〕 如果 a 是BCI－代数〈X；$*$，0〉中与 0 不可比较的元素，那么 $0*a$亦与 0 不可比较。

Q・E・D・

定理 1 表明，具有条件（1）的 BCI－代数一定是 BCK－代数。而条件（1）正是可换性条件，故可换的 BCI－代数一定是 BCK－代数.这表明在BCI－代数理论中不必再研究可换性（1）了。下面我们继续讨论BCK的化的问题。我们在 § 2 中曾经指出，BCK－代数的一条性质（定理Ⅱ・1・6 的3））

$$x*y\leqslant x \qquad (3)$$

不能推广到BCI－代数中。下面我们要利用条件（3）给出一个BCK化定理。

定理 3 （K・Iséki,〔20〕。见〔注83〕）.如果 BCI－代数〈X；$*$，0〉满足条件（3），则它是一个 BCK－代数。从而真BCI－代数一定不满足（3），且不满足（3）的 BCI－代数一定是真BCI－代数。

证 设〈X；$*$．0〉是满足条件（3）的任意一个 BCI－代

数。设 y 是 X 中的任意一个元素，再任取 $x \in X$. 由于（3）成立，由定理 2.5 知，

$$(x*y)*x \leqslant x*x = 0,$$

故由 I－5 及定理 2·3 知，

$$0 = (x*y)*x = (x*x)*y = 0*y,$$

所以，$0 \leqslant y$。即K－4 成立。因此$\langle X; *, 0\rangle$是一个 BCK－代数。

由于第一个结论成立，故（由于逆否命题为真）真 BCI－代数一定不满足（3）。由于BCK－代数一定满足（3），故不满足（3）的BCI－代数一定是真BCI－代数。

Q·E·D·

这个定理的第二个结论给出了真BCI－代数的一个特征。

定理 4 （K·Iséki，〔20〕）。如果BCI－代数$\langle X; *, 0\rangle$满足：对于任意的 x，$y \in X$ 成立

$$(x*y)*y = x*y \tag{4}$$

则它是一个BCK－代数。

证 设 x 是BCI－代数$\langle X; *, 0\rangle$中的任意一个元素。由于（4）成立，故有

$$(x*x)*x = x*x.$$

由 I－3 有

$$0*x = 0,$$

故

$$0 \leqslant x,$$

从而K－4 成立。所以$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK－代数。

Q·E·D·

这个定理表明，正定关联的BCI－代数就是正定关联的

BCK-代数。因此，在BCI-代数理论中不必研究正定关联性。

定理 5 （K·Iséki，〔20〕）。如果BCI-代数$\langle X;\ *, 0\rangle$满足：对于任意的x，$y\in X$成立

$$x*(y*x)=x, \tag{5}$$

则它是一个BCK-代数。

证 设y是X中的任一元素，由（5）可知

$$0*(y*0)=0.$$

由定理2·6知，$y*0=y$，故有

$$0*y=0,$$

即$0\leqslant y$。因此，K-4成立，从而$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个BCK-代数。

Q·E·D·

这个定理表明，关联的BCI-代数就是关联的BCK-代数。因此，在BCI-代数理论中不必研究关联性。

李丹研究过有界性问题，得到了下列：

定理 6 （李丹，〔45〕(。如果BCI-代数$\langle X;\ *, 0\rangle$满足：$\exists 1\in X$，$\forall x\in X$，成立：

$$x\leqslant 1, \tag{6}$$

则它是一个BCK-代数。

证 设z和x是X中的任意两个元素，由于定理2·3有

$$(x*1)*z=(x*z)*1.$$

由（6）知

$$0*z=0,$$

故$0\leqslant z$，从而$\langle X;\ *,\ 0\rangle$满足K-4，故是一个BCK-代数。

Q·E·D·

这个定理表明，有界的BCI-代数就是有界的BCK-代数。因此，在BCI-代数中没有必要研究有界性。

上面已分别指出了，在BCI-代数中不必考虑可换性、有界性、正定关联性和关联性。显然，这些（类）性质在BCK-代数理论中起了很重要的作用，具有这些性质的BCK-代数是BCK-代数类中很重要的真子类。不过，不必担心，BCK-代数的某些类将在BCI-代数中得到推广，如拟可换性及具有条件(S)的性质。另外，BCI-代数本身也将出现一些新类，如结合性和广义结合性等。我们将在以后的各章节中予以研究。

下面，我们介绍几位作者最近得到的几个BCK-化定理。

定理 7 （K・Iséki 和 A・B・Thaheem，〔51〕）设⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数，满足

$$(x*y)*z=(x*z)*(y*z),$$
$$\forall x,\ y,\ z\in X, \qquad (7)$$

那么⟨X；∗，0⟩是一个BCK-代数。

证 在（7）中命 $x=y=z$，则有

$$(x*x)*x=(x*x)*(x*x),$$

即有

$$0*x=0*0=0,$$

故 $0\leqslant x$，$\forall x\in X$。从而K-4成立。这就证明了⟨X；∗，0⟩是一个BCK-代数。

Q・E・D・

定理 8 （K・Iséki和A・B・Thaheem，〔51〕）如果BCI-代数⟨X；∗，0⟩满足

$$(x*y)*(y*x)=x*y,\ \forall x,\ y\in X, \qquad (8)$$

那么⟨X；∗，0⟩是一个BCK-代数。

证 由（8）可有：$\forall x, y \in X$,

$$(x*y)*(y*x) \leqslant x*y.$$

由定理2·4知，

$$(x*y)*(x*y) \leqslant (y*x).$$

故对于任意的x，$y \in X$，$0 \leqslant y*x$。在此不等式中命$x=0$，则有

$$0 \leqslant y*0=y, \qquad \forall y \in X.$$

因此，$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数。

Q·E·D·

1984年4月西北大学数学系八〇级学生李金龙得到了下列结果：

定理9 如果BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$满足：

$$x*(0*x)=x, \qquad \forall x \in X, \tag{9}$$

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数。

证 由（9）有

$$(x*(0*x))*x=0,$$

故

$$(x*x)*(0*x)=0,$$

即有

$$0*(0*x)=0.$$

于是，有

$$\begin{aligned}0*x&=(0*(0*x))*x\\&=(0*x)*(0*x)\\&=0.\end{aligned}$$

故$0 \leqslant x$。因此，$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数。

还有一些BCK-化定理，我们将在以后陆续予以介绍。

§4 BCI-代数的BCK-部分

定理1·2指出，用“一点扩张”的手法，一个BCK-代数可以扩张生成一个真BCI-代数。那么，任意一个真BCI-代数是否都是用这种方法生成的呢？回答是否定的。但是，任意的一个真BCI-代数都可以认为是一个BCK-代数用较为广泛的意义上的扩张生成的（而不只是“一点扩张”）。我们在本节中就来讨论这种扩张。

我们先介绍下列概念：

定义1 （K·Iséki，1980，〔20〕）。设⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数，集合

$$B(X)=\{x\in X:\ 0\leqslant x\} \tag{1}$$

称为它的BCK-部分。

为什么把集合B(X)称为BCI-代数⟨X；∗，0⟩的BCK-部分呢？这是由于成立下列：

定理1 （K·Iséki，〔20〕）。设⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数，则⟨B(X)；∗，0⟩是包含在⟨X；∗，0⟩中的一个极大的BCK-代数。

证 1）设x，y是B(X)中的任意两个元素，我们要证B(X)对∗封闭，即应有$x*y\in B(X)$。事实上，由于$x\in B(X)$，故有

$$0\leqslant x.$$

由定理2·5我们有

$$0*y\leqslant x*y.$$

由于$y\in B(X)$，故$0\leqslant y$，即$0*y=0$，从而我们有

$$0\leqslant x*y.$$

此即$x*y\in B(X)$。

2）由（1），及Ⅰ-3，我们知道$0\in B(X)$。

3）由1）、2）易知，⟨B(X)；*，0⟩是一个BCI-代数。

4）由B(X)的定义知，成立K-4，故⟨B(X)；*，0⟩是一个BCK-代数。

5）由于B(X)中包括了⟨X；*，0⟩中一切≥0的元素，因此⟨B(X)；*，0⟩是包含在X中的一个极大的BCK-代数。

Q·E·D·

我们来看几个例子。

例1 设X={0}，*：$0*0=0$。则⟨X；*，0⟩是一个平凡的BCK-代数。显然，B(X)=X={0}。

例2 设X={0，1，2，3}，X中的二元运算*由下表给出：

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	1	0	2
3	3	3	3	0，

则⟨X；*，0⟩是一个BCK-代数，且B(X)=X。

其实，对于任意的BCK-代数都具有例1和例2中所反映出的性质，即有：

定理2〔注84〕 如果BCI-代数⟨X；*，0⟩可BCK化，则B(X)=X，反之亦真。（这也是一个BCK化定理）。

Q·E·D·

推论 一个BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI-代数当且仅当$B(X)\neq X$，当且仅当$X-B(X)\neq\phi$。

Q. E. D.

下面我们来看几个真BCI-代数的例子。

例 3 $X=\{0, 1\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

，则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI—代数（即$X_2(\mathrm{I})$），而$B(X)=\{0\}$。

例 4 设$X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	4
1	1	0	0	0	4
2	2	2	0	2	4
3	3	3	3	0	4
4	4	4	4	4	0

，则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI-代数（显然，它由"一点扩张"法生成），且

$$B(X)=\{0, 1, 2, 3\}.$$

例 5 设Q为一切有理数之集，$Q^-=Q-\{0\}$。则$\langle Q^-; \div, 1\rangle$是一个真BCI-代数，且$B(Q^-)=\{1\}$。注意，在这里

$$x\leqslant y \quad \text{iff} \quad x\div y=1 \quad \text{iff} \quad x=y.$$

下面我们来讨论真BCK-代数的BCK-部分的性质，我们先回顾一下定理3·2。这个定理现在可被述为：如果 $a\in X-B(X)$，那么 $0*a\in X-B(X)$。为了方便起见，我们引进一个算子 $H(x, y)$。

定义2[注86] 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个BCI-代数。对于X中的任意两个元素 $x, y\in X$，命

$$H(x, y)=x*y. \tag{2}$$

特别地，当 $x=0$ 时，简记为

$$H(0, y)=H_0(y)=0*y. \tag{3}$$

注意，H实际上是一个二元算子：

$$\left.\begin{aligned} &H: X\times X\to X, \\ &(x, y)\mapsto(x*y). \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

而 H_0 是一个一元算子：

$$\left.\begin{aligned} &H_0: X\to X. \\ &x\mapsto 0*x. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

对于算子 H_0 我们有下列结果：

定理3[注86] 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个BCI-代数。则

1° $H_0[B(X)]=\{0\}$ (4)

2° $X-B(X)$ 对 H_0 封闭， 即

$$H_0[X-B(X)]\subseteq X-B(X); \tag{5}$$

3° $\langle X; *, 0\rangle$ 可BCK化的充要条件是 $H_0[X]=\{0\}$。

最后一个结果是一个BCK化定理。

证 我们分别验证如下：

1° 设 $x\in B(X)$，由于 $B(X)$ 的定义，则有

$$H_0(x)=0*x=0,$$

故$H_0[B(X)]=\{0\}$。

2° 对于任意的$x\in X-B(X)$，由定理3·2知，

$$H_0(x)=0*x\overline{\in}B(X),$$

故$H_0(x)\in X-B(X)$，因此$H_0[X-B(X)]\subseteq X-B(X)$。

3° “⇒”．若$\langle X;*,0\rangle$是一个BCK-代数，则$B(X)=X$，由1°便有

$$H_0[X]=\{0\}。\tag{6}$$

“⇐”．若BCK—代数$\langle X;*,0\rangle$满足（6），则$\forall x\in X$，有

$$H_0(x)=0*x=0,$$

即$0\leqslant x$，故K—4成立，从而$\langle X;*,0\rangle$是一个BCK-代数。

Q·E·D·

注意，定理3的1°说明，算子H_0把BCK-部分收缩为一点之集$\{0\}$。

现在，我们再推广定理3·2，即有下列：

定理4 （K·Iséki，[20]）。设$\langle X;*,0\rangle$是一个BCI-代数，若$x\in B(X)$，$y\in X-B(X)$，则

$$H(x,y)=x*y\overline{\in}B(X)\tag{7}$$

证 我们用反证法。设$x\in B(X)$，$y\in X-B(X)$，使

$$H(x,y)=x*y\in B(X)。$$

由于$x\in B(X)$，由定理1，

$$0\leqslant x*(x*y)。$$

由公理K-1又有

$$x*(x*y)=(x*0)*(x*y)\leqslant y*0=y。$$

故$0\leqslant y$，即$y\in B(X)$。矛盾。 Q·E·D·

如果我们记

$$H_x(y)=H(x,\ y)=x*y, \tag{8}$$

则定理4表明，当$x\in B(X)$时，X—B(X)对算子H_x也是封闭的。这显然是定理3的2°的一个推广。

利用定理4还可得到下列BCK-化定理：

定理5 （K·Iséki和A·B·Thaheem，〔51〕；(注87)如果BCI-代数⟨X；∗，0⟩满足

$$(x*y)*((x*y)*(y*x))=0,$$
$$\forall x,\ y\in X, \tag{9}$$

则⟨X；∗，0⟩是一个BCK-代数。

证 用反证法，如果⟨X；∗，0⟩不是一个BCK-代数，由定理2知，$X—B(X)\neq\phi$。任取$a\in X—B(X)$，
由（9）知，

$$(0*a)*((0*a)*(a*0))=0,$$

即

$$(0*a)*((0*a)*a)=0.$$

因此，我们有

$$0*a\leqslant(0*a)*a.$$

由定理2·5有

$$(0*a)*(0*a)\leqslant((0*a)*a)*(0*a),$$

因此，又有

$$\begin{aligned}0&\leqslant((0*a)*a)*(0*a)\\&=((0*a)*(0*a))*a\\&=0*a.\end{aligned}$$

于是，　$0*a\in B(X)$。这与定理4（或定理3·2）矛盾。所以，⟨X；∗，0⟩是一个BCK-代数。　　Q·E·D·

在这里，我们还需要对二元算子$H(x, y)=x*y$作些讨论。我们知道，如果〈X；$*$，0〉是一个BCI-代数，那么，

$$X=B(X)U(X-B(X)).\qquad(10)$$

为了方便起见，我们引入下列概念：

定义3〔注88〕 设〈X；$*$，0〉是一个BCI-代数。称集合X－B(X)为X的BCK-余部。

显然，有下列结果：

定理6〔注89〕 设〈X；$*$，0〉是一个BCI-代数。那么〈X；$*$，0〉是一个BCK-代数的充要条件是它的BCK-余部是一个空集；因此，〈X；$*$，0〉是一个真BCI-代数的充要条件是它的BCK-余部非空。

Q·E·D·

我们现在具体来看一下$H(x, y)=x*y$。由定理1的证明知，如果$x\in B(X)$，$y\in B(X)$，那么$x*y\in B(X)$。由定理4知，如果$x\in B(X)$，$y\in X-B(X)$，那么$x*y\in X-B(X)$。自然地，我们有下列问题：

问题1 如果$x\in X-B(X)$，$y\in B(X)$，那么$x*y\in X-B(X)$吗？

问题2 如果$x\in X-B(X)$，$y\in X-B(X)$，那么$x*y$一定属于X—B(X)吗？

1984年4月，西北大学数学系八〇级学生李欣对问题1给出了肯定回答，即有下列：

定理7 设〈X；$*$，0〉是一个BCI-代数。如果$x\in X-B(X)$，$y\in B(X)$，则$x*y\in X-B(X)$。

证 用反证法。如果$x\in X-B(X)$，$y\in B(X)$，

而有

$$x*y\in B(X),$$

即有

$$0\leqslant x*y,$$

那么，我们有

$$0*x\leqslant(x*y)*x=(x*x)*y$$
$$=0*y=0$$

后一等式成立是由于$y\in B(X)$。由Ⅰ－5知，

$$0*x=0,$$

故$0\leqslant x$，因此$x\in B(X)$。这与“$x\in X-B(X)$”的条件矛盾。所以，$x*y\in X-B(X)$。　　Q·E·D·

对于问题2李欣给出了下列反例：

例1　设$X=\{0,1,2,3\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

则$\langle X;*,0\rangle$是一个BCI—代数，且

$$B(X)=\{0\},\qquad X-B(X)=\{1,2,3\}.$$

容易算出：

$$1\,\overline{\in}\,B(X),\qquad 2\,\overline{\in}\,B(X),$$
而$1*2=3\,\overline{\in}\,B(X)$；
$$1\,\overline{\in}\,B(X),\qquad 1*1=0\in B(X).$$

这个例子说明了BCI—代数$\langle X;*,0\rangle$的BCK—余部$X-B(X)$对运算$*$并不必封闭。

关于BCK部分还有一个问题：我们在定理2中讨论了“B(X)=X”这一极端的情形，那么另一个极端“B(X)={0}”的情形是什么呢？关于这个问题，我们将在第五章中进行讨论。

§5 BCI-代数的积

同BCK-代数一样，利用乘积也是构造新的BCI-代数的一种方法。这一节中，我们来介绍一下有关BCI-代数乘积的基本概念。

BCI—代数的乘积是K·Iséki在〔22〕中引入的，即有下列：

定理1 （K·Iséki，〔22〕）。设$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$是两个BCI—代数，命

$$\left.\begin{aligned} &X=X_1\times X_2,\\ &*:(x_1, x_2)*(y_1,y_2)=(x_1*_1y_1,x_2*_2y_2),\\ &0=(0_1, 0_2)\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI代数，称为$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$的积BCI-代数，简称积代数。

证 显然，$0\in X$，在X中我们规定

$$(x_1, x_2)\leqslant(y_1, y_2)\text{ iff }(x_1, x_2)*(y_1, y_2)=0=(0_1, 0_2)\quad(2)$$

公理I-1，I-2，I-3，I-4可同定理Ⅱ·10·1证明中验证K-1，K-2，K-3，K-5那样去做。我们只要证明$\langle X; *, 0\rangle$满足I-5。设(x, y)是X中的一个任意元素，满足

$$(x, y)\leqslant 0=(0_1, 0_2),$$

或

$$(x, y) * 0 = 0,$$

即

$$(x, y) * (0_1, 0_2) = (0_1, 0_2).$$

由（1）中规定的乘法我们有

$$(x *_1 0_1, y *_2 0_2) = (0_1, 0_2)$$

故我们有

$$x *_1 0_1 = 0_1, \quad y *_2 0_2 = 0_2.$$

由于$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$都是BCI-代数，从而由I-5知，

$$x = 0_1, \quad y = 0_2.$$

从而$(x, y) = (0_1, 0_2) = 0$。所以$\langle X; *, 0\rangle$满足I-5。

Q·E·D·

类似地，我们可以定义任意有限个BCI-代数的积代数和任意个BCI-代数的积代数。例如，我们有下列：

定理2〔注90〕 设$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle (\alpha \in I)$是一族BCI-代数，其中I是指标集。设$X = \prod\{X_\alpha; \alpha \in I\}$是一切映射$f: I \to U\{X_\alpha: \alpha \in I\}$的集合。使得$f(\alpha) \in X_\alpha$。对于任意的$f, g \in X$，定义$f * g$为：

$$\left.\begin{aligned} &(f * g)(\alpha) = f(\alpha) *_\alpha g(\alpha), \quad \forall \alpha \in I, \\ &0(\alpha) = 0_\alpha, \quad \forall \alpha \in I, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，称为这一族BCI-代数的积代数。

证 同样地，我们只用证$\langle X; *, 0\rangle$满足I-5。事实上，设$f \in X$，且

$$f * 0 = 0.$$

则对于任意的$\alpha \in I$我们有

$$(f * 0)(\alpha) = 0(\alpha) = 0_\alpha.$$

又由（3）有

$$(f * 0)(\alpha) = f(\alpha) *_\alpha 0(\alpha) = f(\alpha) *_\alpha 0_\alpha,$$

故得

$$f(\alpha) *_\alpha 0_\alpha = 0_\alpha,$$

由于$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha \rangle$是一个BCI-代数，满足I-5，故$f(\alpha) = 0_\alpha$，由于对于任意的$\alpha \in I$有$f(\alpha) = 0_\alpha$，故$f = 0$，

Q·E·D·

现在我们举两个例子

例1 设$X = \{0, 1\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

*	0	1
0	0	1
1	1	0

则$\langle X; *, 0 \rangle$是一个真BCI-代数。

命$Y = X \times X = X_2$,

$0 = (0, 0)$，$a_1 = (0, 1)$，$a_2 = (1, 0)$，

$a_3 = (1, 1)$。

我们容易得到，积BCI-代数$\langle Y; *, 0 \rangle$的乘法表为

*	0	a_1	a_2	a_3
0	0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	0	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	0	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	0

例 2 设X = {0, 1, 2}, X中的二元运算∗由下表给出:

∗	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	2,

则⟨X; ∗, 0⟩是一个真BCI-代数(用“一点扩张”生成)。

命$Y = X \times X = X_2$, 记 $0 = (0, 0)$, $a_1 = (0, 1)$, $a_2 = (0, 2)$, $a_3 = (1, 0)$, $a_4 = (1, 1)$, $a_5 = (1, 2)$, $a_6 = (2, 0)$, $a_7 = (2, 1)$, $a_8 = (2, 2)$。则积代数⟨X; ∗, 0⟩的乘法表为:

∗	0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
0	0	0	a_2	0	0	a_2	a_6	a_6	a_8
a_1	a_1	0	a_2	a_1	0	a_2	a_7	a_6	a_8
a_2	a_2	a_2	0	a_2	a_2	0	a_8	a_8	a_6
a_3	a_3	a_3	a_5	0	0	a_2	a_6	a_6	a_8
a_4	a_4	a_3	a_5	a_1	0	a_2	a_7	a_6	a_8
a_5	a_5	a_5	a_3	a_2	a_2	0	a_8	a_8	a_6
a_6	a_6	a_6	a_8	a_6	a_6	a_8	0	0	a_2
a_7	a_7	a_6	a_8	a_7	a_6	a_8	a_1	0	a_2
a_8	a_8	a_8	a_6	a_8	a_8	a_6	a_2	a_2	0。

为了方便起见,我们仍简记:

$$X^n = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n}. \tag{4}$$

类似于BCK-代数的可积性概念(*cf*. 定义 Ⅱ·10·1),我们也可引入BCI-代数的可积性概念。

定义 1〔注91〕 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是任意的一族BCI-代数$\{\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle:\ \alpha\in I\}$的积代数。设P是一个BCI-代数的性质。如果每个$\langle X_\alpha;\ *,\ 0\rangle$具有性质P，可证积代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$也具有性质P。称P为一个可积性。反之，若积代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$具有性质P，而可证明每个BCI—代数$\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle$也具有性质P，则称P为逆可积性。

定义 2〔注92〕 在定义1的条件下，如果当$|I|=\aleph_0$时P是一个可积性（逆可积性），则称P为可数可积性（逆可积性）；而当$|I|<\aleph_0$时P是一个可积性（逆可积性）则称P为有限可积性（逆可积性）。

我们从例1和例2可以看出，如果$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个真BCI-代数，则$\langle x^2;\ *,\ 0\rangle$仍是真BCI-代数。一般地，我们有下列：

定理 3〔注93〕 "是真BCI-代数"的性质是一个可积性。

Q·E·D·

我们给出一个更一般的结果：

定理 4〔注94〕 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一族BCI-代数$\{\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle:\ \alpha\in I\}$的积代数。则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个真BCI-代数的充要条件是存在$\alpha\in I$，使$\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle$是真BCI-代数。

证 "$\Leftarrow$"。不妨设$\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle$是真BCI-代数，$\alpha\in I$，于是存在$x_\alpha\in X_\alpha$，使

$$y_\alpha=0_\alpha *_\alpha x_\alpha\neq 0_\alpha.$$

命

$$f(\beta)=\begin{cases}x_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}$$

则$f \in X$，且

$$(0 * f)(\beta) = \begin{cases} 0_\alpha *_\alpha f(\alpha) = y_\alpha, & \beta = \alpha, \\ 0_\beta *_\beta 0_\beta, = 0_\beta & \beta \neq \alpha, \end{cases}$$

由于$y_\alpha \neq 0_\alpha$，故$0 * f \neq 0$。所以$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI-代数。

"⇒"。设$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI-代数。于是，存在$f \in X$，使

$$0 * f \neq 0.$$

故必$\exists \alpha \in I$，使

$$(0 * f)(\alpha) \neq 0(\alpha) = 0_\alpha,$$

即

$$0_\alpha *_\alpha f(\alpha) \neq 0_\alpha,$$

于是$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$是一个真BCI代数。

Q·E·E·

由定理4也可推知存在无穷多个真BCI-代数。我们只要从一个真BCI-代数X出发（如取$X_2(I)$），那么

$$X, X^2, X^3, \cdots, X^n, \cdots$$

都是真BCI-代数。如果我们以X^I表示以I为指标集的，每个因子皆为X的积代数，那么我们还可得知真BCI-代数的全体作成BCI-代数类的一个真子类。由于定理1·3已经给出了这些结果，我们就不在这里多述了。

对于积代数，我们在这里还需提出一个问题：积代数的BCK-部分是否各因子的BCK-部分的乘积呢？这个问题的回答是肯定的，即我们有下列：

定理5〔注95〕设$\langle X; *, 0\rangle$是一族BCI-代数$\{\langle X_\alpha;$

$*_\alpha$, $0_\alpha\rangle:\alpha\in I\}$的积代数．则

$$B(X)=\Pi\{B(X_\alpha):\alpha\in I\}. \tag{5}$$

证 因为$B(X_\alpha)$皆是BCK-代数，故$\Pi\{B(X_\alpha):\alpha\in I\}$也是一个BCK-代数.而B(X)是包含在X中的一个极大的BCK-代数，从而

$$B(X)\supseteq\pi\{B(X_\alpha):\alpha\in I\}.$$

另一方面，设$f\in B(X)$，则

$$0*f=0,$$

故 $\forall\alpha\in I$有

$$0_\alpha *_\alpha f(\alpha)=(0*f)(\alpha)=0(\alpha)=0_\alpha,$$

即$f(\alpha)\in B(X_\alpha)$．由于α是I中任一元素，故$f\in\Pi\{B(X_\alpha):\alpha\in I\}$.

这样便有

$$B(X)\subseteq\Pi\{B(X_\alpha):\alpha\in I\}.$$

所以（5）成立。 Q·E·D·

还有许多可积性，我们将在以后陆续给出。

§6 子 代 数

我们在定义Ⅰ·6·4中曾给出过BCK-代数的子代数的概念，并且在第2章中对于子代数作了一些简单的讨论。现在，我们来讨论一下BCI-代数的子代数。当然，它也是产生新的BCI-代数的一种方法。应当说明，“子代数”这一名称是K·Iséki在〔20〕中首先提出来的。但是，他没有认真地去下这个定义。雷天德在〔15〕中给出了BCI-代数的子代数的定义，而且做了一些初步的讨论。下面给出的“子代数”的定义将与BCK-

代数的子代数的定义保持一致。

定义 1 BCI-代数〈X；$*$，0〉的子集Y被称为它的一个子代数，如果〈Y；$*$，0〉是一个BCI-代数。

类似于定理Ⅱ·6·12，BCI-代数的子代数有下列特征（雷天德在〔15〕中以此作为子代数的定义）：

定理 1 BCI-代数〈X；$*$，0〉的一个非空子集Y是一个子代数的充要条件是Y对运算$*$封闭

证 同定理Ⅱ·6·12的证明。 Q·E·D·

在第二章§6中我们曾介绍过BCK-代数的完备性和局部完备性。在BCI-代数中不必研究这两个性质。因为具有完备性或局部完备性的BCI-代数（如定义Ⅱ·6·5和Ⅱ·6·6那样去定义）必是有界的，从而它是可BCK化的。这样，我们有下列BCK化定理：

定理 2〔注96〕 如果BCI-代数〈X；$*$，0〉具有完备性或局部完备性，则它们可BCK化。 Q·E·D·

下面我们举几个子代数的例子。

例 1 对于任意的BCI-代数〈X；$*$，0〉，{0}和X都是它的子代数。

对于这一点，我们引入几个名称：

定义 2〔注97〕 设〈X；$*$，0〉是一个BCI-代数。我们称：

1° {0}为它的平凡的子代数；

2° $A\subseteq X$为它的真子代数，如果子代数$A\neq X$，或$X-A\neq\phi$；

3° $A\subset X$为它的一个极大子代数，如果A是一个真子代数，且没有真子代数真包含A，即如果有子代数$B\supset A$，且$B-A\neq\phi$，那么$B=X$；

4° $A \subset X$为它的一个最大的子代数，如果A是一个真子代数，且任一真子代数$B \subseteq A$；

5° $A \subseteq X$为它的一个具有性质P的一个极大子代数，如果A是具有性质P的一个真子代数，且没有一个具有性质P的真子代数$B \supset A$，且$B - A \neq \phi$。

类似地有具有性质P的一个最大子代数的概念。

我们再来看几个例子。

例 2 设$X = \{0, 1, 2\}$，X中二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0,

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，且$\{0, 2\}$是它的一个子代数，也是一个极大的子代数。

我们注意，$|X| = 3$，$|\{0, 2\}| = 2$，$2 \nmid 3$。可见，类似于群论中的 Lagrange 定理的命题在BCI-代数中不成立。

其次，我们还应注意，$\{0, 2\}$只是一个极大的子代数，而不是一个最大的子代数。因为$\{0, 1\}$还是一个子代数。

第三，我们应注意到，$B(X) = \{0, 1\}$，且$\{0, 1\}$是X中所包含的最大的BCK-代数（加上$*$及0）。因此，$\{0, 1\}$是X的具有BCK性质（即满足K-1至K-6）的最大子代数。

这最后一点，我们可有如下的一般性结果：

定理 3 （K. Iséki, 〔20〕），设$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI-代数，则$B(X)$是它的具有BCK-性质的最大子代数。

证 我们只用证B(X)是它的一个子代数，其它性质是显然满足的。由定理4·1，显然B(X)非空，且对$*$封闭，故B(X)是一个子代数。

Q·E·D·

注 B(X)不必是X的最大子代数，可见下列：

例3 命BCI-代数⟨X; $*$, 0⟩为例2中所给出的BCI-代数。设X^2为它的积代数（见例5·2），则

$$B(X^2)=\{0, a_1, a_3, a_4\},$$

而X^2中有包含$B(X^2)$的真子代数

$$S_1=\{0, a_1, a_3, a_4, a_2, a_5\},$$

此外，X^2中还有子代数

$$S_2=\{0, a_8\}$$

根本不包含在$B(X^2)$中。

下面我们介绍生成子代数的几个结果。1984年4月，西北大学数学系八〇级学生李金龙得到了下列结果：

定理4 设⟨X; $*$, 0⟩是一个BCI-代数。对于任意的$C\in X$，记

$$Xc=\{x*c:x\in X\}.$$

则Xc是X的一个子代数。

证 显然，集合Xc是X的一个非空子集。现在，为证Xc是X的一个子代数，据定理1，只要证Xc对运算$*$封闭即可。

$\forall y_1, y_2\in Xc$，由Xc的定义知，$\exists x_1, x_2\in X$，使

$$y_1=x_1*c, \qquad y_2=x_2*c.$$

于是，我们有：

$$y_1 * y_2 = (x_1 * c) * (x_2 * c)$$
$$= (x_1 * (x_2 * c)) * c \in Xc.$$

因此，集合Xc对运算$*$封闭，从而Xc是X的一个子代数。

Q·E·D·

对这个结果我们作如下几点说明：

注 1 从BCI-代数〈X；$*$，0〉的乘法表来看，集合Xc正是元素C所在列中出现的元素作成的集合。因此，我们可以说，BCI-代数的乘法表中每一列元素作成之集是它的一个子代数。

注 2 从定理4的证明可以看出，这个结果对于BCK—代数也成立；而且对于我们将在第七章中介绍的BCH-代数也是成立的；

1984年4月，作者和李欣一起得到了下列简单而有趣的结果：

定理 5〔注98〕 设〈X；$*$，0〉是一个BCK-代数，$a \overline{\in} X$，$Y = XU\{a\}$，〈Y；$*$，0〉是X的一点扩张。则$(Y—B(Y)U\{0\}$是Y的一个子代数。

证 因为$(Y—B(Y))U\{0\} = \{0, a\}$，而

$$a * a = 0, \qquad a * 0 = a,$$
$$0 * a = a, \qquad 0 * 0 = 0.$$

故$(Y—B(Y))U\{0\}$是对运算$*$封闭的一个非空集合，因此它是Y的一个子代数。

注 一般地，对于任意的BCI-代数〈X；$*$，0〉集合$(X-B(X))U\{0\}$不必是X的一个子代数，可见下列例子：

例 5 设$X = \{0, 1, 2, 3\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	3	0	0,

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI-代数，且

$$(X-B(X))\cup\{0\}=\{0, 2, 3\}.$$

由于$2*3=1\bar{\in}(X-B(X))\cup\{0\}$，故集合$(X-B(X))\cup\{0\}$不是X的一个子代数。

为了方便起见，我们在这里引入下列记号：

定义3〔注99〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，记

$$L(X)=(X-B(X))\cup\{0\}.$$

在例5中，$L(X)=\{0, 2, 3\}$，而定理5则说，如果$\langle Y; *, 0\rangle$是BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$的一点扩张，那么$L(Y)$一定是Y的一个子代数。以后，我们对$L(X)$还要作一些讨论；而在第五章中我们还要讨论由此而引入的一类BCI-代数。

在定义1·3中我们介绍过BCI-代数的同态和同构概念。这些概念与子代数有什么关系呢？下面几个结果给出这个关系。

定理6 （雷天德，〔15〕）. 设f是BCI-代数$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$到BCI-代数$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$的一个同态映射，则$\mathrm{Ker}(f)$是$X_1$的一个子代数。

证 显然，$0\in \mathrm{Ker}(f)$. 设$x_1, y_1\in \mathrm{Ker}(f)$. 因$f(x_1*_1y_1)=f(x_1)*_2f(y_1)=0_2*_20_2=0_2$，故$x_1*_1y_1\in \mathrm{Ker}(f)$。所以，$\mathrm{Ker}(f)$是$X_1$的一个子代数。

Q·E·D·

定理7 （雷天德〔15〕）. 设f是BCI-代数$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$

到BCI-代数$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$的一个同态映射，$S_1$是$X_1$的一个子代数，则$S_2=f[S_1]$是$X_2$的一个子代数。

证 因S_1是X的一个子代数，故$0_1\in S_1$。由引理1·1知，

$$0_2=f(0_1)\in f[S_1]=S_2.$$

设x_2，y_2是S_2中的任二元，任取x_1，$y_1\in S_1$，使

$$x_2=f(x_1), \qquad y_2=f(y_1).$$

由于f是一个同态，故

$$f(x_1 *_1 y_1)=f(x_1) *_2 f(y_1)=x_2 *_2 y_2,$$

因此$x_2 *_2 y_2\in S_2$。 Q·E·D·

定理8 （雷天德〔15〕)。设f是BCI-代数$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$到BCI-代数$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$上的一个同态映射，$S_2$是$X_2$的一个子代数，则

$$S_1=\{x_1\in X_1: f(x_1)\in S_2\}$$

是X_1的一个子代数。

证 因为S_2是X_2的一个子代数，故$0_2\in S_2$。由于$f(0_1)=0_2$，因此$0_1\in S_1$。设x_1，y_1是S_1中的任意两个元素，则

$$f(x_1 *_1 y_1)=f(x_1) *_2 f(y_1)\in S_2,$$

故$x_1 *_1 y_1\in S_1$。 Q·E·D·

在同构对应下我们有下列较强的一个结果：

定理9〔注100〕 设f是BCI-代数$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$到$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$上的一个同构对应，则

$$f[B(X_1)]=B(X_2), \qquad f^{-1}[B(X_2)]=B(X_1). \tag{1}$$

证 由于$\langle B(X_1); *_1, 0_1\rangle$是BCK-代数，故$\langle f[B(X_1)]; *_2, 0_2\rangle$也是一个BCK-代数，因此$f[B(X_1)]\subseteq B$

(X_2)。由于f^{-1}亦是一个同构，故$f^{-1}[B(X_2)]\subseteq B(X_1)$。因此有（1）成立。 Q·E·D·

对于积代数的子代数我们有下列结果：

定理10[注101] 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一族$\{\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle:\alpha\in I\}$的积代数，则有：

1）若A是X的子代数，那么对于任意的$\alpha\in I$，

$$A_\alpha=\{f(\alpha):f\in A\} \tag{2}$$

是X_α的一个子代数。

2）若A_α是X_α的一个子代数，$\alpha\in I$，那么$A=\Pi\{A_\alpha:\alpha\in I\}$是X的一个子代数。

证 1）设A是X的一个子代数，则$0\in A$，故$\forall\alpha\in I$，

$$0_\alpha=0(\alpha)\in A_\alpha.$$

设x，y是A_α的任二元素，则$\exists f$，$g\in A$，使

$$f(\alpha)=x,\qquad g(\alpha)=y.$$

于是

$$(f*g)(\alpha)=f(\alpha)*_\alpha g(\alpha)=x*_\alpha y.$$

由于A是X的一个子代数，故$f*g\in A$，因此$x*_\alpha y\in A\alpha$。所以A_α是一个子代数。

2）设对于每个$\alpha\in I$，A_α是X_α的一个子代数。则$A=\Pi\{A_\alpha:\alpha\in I\}$是X的一个子集。

因为每个A_α是X_α的一个子代数，所以$0_\alpha\in A_\alpha$，故$0\in A$。

设f，g是A中任二元素。$\forall d\in I$，

$$(f*g)(\alpha)=f(x)*_\alpha g(\alpha).$$

由于$f\in A$，$g\in A$，故$f(\alpha)$，$g(\alpha)\in A_\alpha$。因A_α是X_α的一个子代数，故$f(\alpha)*_\alpha g(\alpha)\in A_\alpha$，从而$(f*g)(\alpha)\in A_\alpha$。所以$f*g$

$\in A$。

Q·E·D·

定理11[注102]　设⟨X；$*$，0⟩是一族BCI-代数{⟨X_α；$*_\alpha$，0_α⟩；$\alpha\in I$}的积代数，则有：若A是X的一个极大（最大）的子代数，那么对于任意的$\alpha\in I$，

$$A_\alpha=\{f(\alpha):f\in A\}\neq X_\alpha$$

是X_α的一个极大（最大）的子代数。

证　只用对极大性证明，最大性可类似地证明．设A是X的一个极大的子代数．由定理10，则每个A_α是X_α的一个子代数．现要证A_α是极大的．我们用反证法，假定有一个A_α不是X_α的一个极大的子代数，故存在X_α的一个真子代数B_α，使B_α真包含A_α，命

$$A'=\Pi\{B_\beta:\beta\in I\},$$

其中

$$B_\beta=\begin{cases}B_\alpha, & \beta=\alpha,\\ A_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}$$

则A′是X的一个真子代数，且真包含A．这与A的极大性矛盾。

Q·E·D·

注　若A_α是X_α的极大子代数，不能推出$A=\Pi\{A_\alpha:\alpha\in I\}$是极大子代数．可见下例。

例6　取$X_2(I)$，则{0}是$X_2(I)$的一个极大子代数．但{0}$=\{(0,0)\}$只是$X_2(I)\times X_2(I)$的一个子代数，而不是它的极大子代数．因

$$\{0,1\}\times\{0\}=\{(0,0),(1,0)\}$$

也是$X_2(I)\times X_2(I)$的一个真子代数，且包含$\{(0,0)\}$。

下面我们来讨论一下极大子代数的存在性问题。我们先给出一个引理。

引理1[注103]　设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个BCI-代数。设$\{A_\alpha:\alpha\in I\}$是一族子代数，且可排为

$$A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_\alpha\subset\cdots,\qquad \alpha\in I. \qquad (3)$$

则$\cup\{A_\alpha:\alpha\in I\}$是X的一个子代数。

证　显然，$0\in A_0\subseteq\cup\{A_\alpha:\alpha\in I\}$。

设x，y是$\cup\{A_\alpha:\alpha\in I\}$的任意两个元素，则存在$A_\alpha, A_\beta(\alpha,\beta\in I)$，使

$$x\in A_\alpha,\qquad y\in A_\beta.$$

由于条件（3）。不妨设$A_\alpha\subseteq A_\beta$，则$x$，$y\in A_\beta$。从而$x*y\in A_\beta$。故

$$x*y\in\cup\{A_\alpha:\alpha\in I\}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

定理12[注104]　设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个BCI-代数，$\mathscr{A}$是X的一切真子代数作成的集合（以后记为$\mathscr{A}(X)$），如果满足条件

$$X-U\mathscr{A}(X)\neq\phi \qquad (4)$$

则在承认选择公理的条件下对于X的每个真子代数可扩充为X的一个极大的子代数。

证　设A_0是X的任一真子代数。命$\mathscr{A}(X,\ A_0)$为X中包含A_0的一切真子代数作成的集合。在$\mathscr{A}(X,\ A_0)$中任取形如(3)的一个链，则$\cup\{A_\alpha:\alpha\in I\}\in\mathscr{A}(X,\ A_0)$。事实上，引理1给出，$\cup\{A_\alpha:\alpha\in I\}$是一个子代数，由于（4），$\cup\{A_\alpha:\alpha\in I\}$是一个真子代数。这样，在$\mathscr{A}(X,\ A_0)$中每个链（3）必有上界，故$\mathscr{A}(X,\ A_0)$中有极大元。因此$A_0$可扩充为X的一个极大的子代数。　　Q.E.D.

注 这个证明中用到了选择公理的一个等价命题——极大原理。

在本节的最后，我们再引入一个概念。

定义 4〔注105〕 如果任意的一个BCI-代数 $\langle X;\ *,0\rangle$ 具有性质P，能证明它的每个子代数也具有性质P，则称P为一个遗传性；如果能证明 X的每个子集也具有性质 P. 则称 P 为 BCI-代数的一个强遗传性。

BCI-代数具有哪些遗传性和强遗传性的问题，以后各章节将有所讨论，也欢迎读者进行讨论。还有一点需要说明，本节中的一些结果和概念可完全述于 BCK-代数中，这里不一一详述了，读者可自行练习。

§7 并代数

在BCK-代数理论中有并代数的概念，定理Ⅱ·11·1给出了一族BCK-代数的并代数。自然应当提出下列：

问题 1 可否类似于定理Ⅱ·11·1那样定义一族BCI-代数的并代数呢？

这个问题是说，如果 $\{\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle:\alpha\in I\}$ 是一族BCI—代数，其中 I 是一个非空指标集合，且 $0_\alpha=0$，$\forall_\alpha\in I$，$X_i\cap X_j=\{0\}$，$i\neq j$，命

$$X=\cup\{X_\alpha:\alpha\in I\},$$

$$*:x*y=\begin{cases}x*_\alpha y, & \text{当 } x,y\in\text{同一个}X_\alpha,\\ x_1 & \text{当} x,y\text{不属于同一个}X_\alpha,\end{cases}\quad(1)$$

那么 $\langle X;\ *,\ 0\rangle$ 是一个BCI-代数吗？

这个问题的回答是否定的，可见下列：

例 1 设$X_1=\{0, a\}$，X_1中的二元运算$*_1$由下表给出：

$*_1$	0	a
0	0	a
a	a	0，

则$\langle X_1; *_1, 0\rangle$是一个真BCI-代数。

设$X_2=\{0, b, c\}$，X_2中的二元运算$*_2$由下表给出：

$*_2$	0	b	c
0	0	0	c
b	b	0	c
c	c	c	0，

则$\langle X_2; *_2, 0\rangle$是一个真BCI-代数。

利用(1)可以生成一个(2, 0)型代数$\langle X; *, 0\rangle$，其中：$X=\{0, a, b, c\}$，而X中的二元运算$*$实际上可由下表给出：

$*$	0	a	b	c
0	0	a	0	c
a	a	0	a	a
b	b	b	0	c
c	c	c	c	0。

但是，$\langle X; *, 0\rangle$并不是一个BCI-代数。事实上，由于

$$(a*(a*c))*c=(a*a)*c=0*c=c\neq 0,$$

故 I—2 不成立。

这个例子说明了，按（1）那样引入BCI-代数的并代数是

行不通的。这样，就产生了下列自然提出的问题：

问题 2 [注106] 在BCI-代数理论中可否引入并代数的概念？也就是说，对于任意的一族BCI-代数，可否较自然地引入它们的并代数？

据作者所知，这个问题至今没有完全解决。作者认为，有兴趣的读者可以考虑这个问题。毫无疑问，如果能够引入一种自然的并代数，那么对于构造新的BCI-代数会起到一定的作用。

1984年4月，西北大学数学系八〇级学生李欣提出了一个BCK-代数和一个BCI-代数的并代数的构造方法，即有下列：

定理 1 设 $\langle X_1; *_1, 0\rangle$ 是一个BCK-代数，而 $\langle X_2; *_2, 0\rangle$ 是一个BCI-代数。命

$$X = X_1 \cup X_2,$$

而X中的二元运算$*$如下地给出：

$$x * y = \begin{cases} x *_1 y, & x, y \in X_1, \\ x *_2 y, & x, y \in X_2, \\ x, & x \in X_2,\ y \in X_1, \\ 0 *_2 y, & x \in X_1,\ y \in X_2,\ y \neq 0, \\ x, & x \in X_1,\ y \in X_2,\ y = 0. \end{cases} \tag{2}$$

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个BCI-代数。

在证明这个定理以前，我们先来看一下由（2）给出的乘法表的特点。不妨设

$$X_1 = \{0, \cdots, a, \cdots\},$$
$$X_2 = \{0, \cdots, b, \cdots\},$$

则

$$X = \{0, \cdots, a, \cdots, b, \cdots\},$$

而X中的二元运算$*$产生如下的乘法表：

$*$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	$\cdots$	b	$\cdots$
0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$0*_2b$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a	a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$0*_2b$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
b	b	$\cdots$	b	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

表中虚线所围部分分别与X_1及X_2的乘法表中相应部分相同。下面我们给出这个定理的证明。

证 分作两步来证。

第一步验证（2）中给出的运算$*$的合理性。

（1）当$x=y=0$时，可以算出：

$$x*y=\begin{cases}0, & x=y=0\in X_1\\ 0, & x=y=0\in X_2,\\ 0, & x=0\in X_2,\ y=0\in X_1\\ 0, & x=0\in X_1,\ y\in X_2, y=0.\end{cases}$$

（2）当$x=0$，而$y\neq 0$时。

如果$y\in X_1$，那么

$$x*y=\begin{cases}0, & x=0\in X_1,\\ 0, & x=0\in X_2.\end{cases}$$

如果$y\in X_2$，那么

$$x*y=\begin{cases}0*_2y, & x\in X_2,\\ 0*_2y, & x\in X_1\end{cases}$$

（3）当$x\neq 0$，而$y=0$。

如果 $x\in X_1$，那么

$$x*y=\begin{cases}x, & y\in X_1,\\ x, & y\in X_2.\end{cases}$$

当 $x\in X_2$，那么

$$x*y=\begin{cases}x, & y\in X_1,\\ x, & y\in X_2.\end{cases}$$

第二步，我们来验证 $\langle X; *, 0\rangle$ 满足 BCI- 代数的五条公理。

（1）证满足 I—5.

设 $x*0=0$。由第一步易知成立

$$x*0=x, \qquad \forall x\in X.$$

故由已知条件可知

$$0=x*0=x.$$

因此，I-5 成立，

（2）证满足 I-4，

设 $x, y\in X$，满足 $x*y=y*x=0$。现欲证 $x=y$。分成以下几种情形：

1° 当 $x,y\in X_1$ 时，显然有 $x=y$。

2° 当 $x,y\in X_2$ 时，显然也有 $x=y$。

3° 当 $x\in X_2$，$y\in X_1$ 时，由（2）可知

$$x*y=x,$$

但已知 $x*y=0$，故 $x=0$。而

$$0=y*x=y*0=y.$$

所以，此时有 $x=y$。

4° 对于 $x\in X_1$，$y\in X_2$ 的情形同样可证。

因此，I－4成立。

（3）证I－3满足。

显然，由（2）易知，$\forall x\in X$有$x\ast x=0$。

（4）证满足I－2。

如果$x\in X_2$，则有

$$(x\ast(x\ast y))\ast y=\begin{cases}(x\ast x)\ast y=0\ast y=0, & y\in X_1,\\ 0, & y\in X_2.\end{cases}$$

如果$x\in X_1$，那么有

$$(x\ast(x\ast y))\ast y=$$

$$\begin{cases}0, & y\in X_1,\\ (x\ast x)\ast y=0\ast y=0, & y\in X_2, y=0,\\ (x\ast(0\ast y))\ast y=(0\ast(0\ast y))\ast y=0, & y\in X_2, y\neq 0.\end{cases}$$

所以，X满足I－2。

（5）证满足I－1。我们分以下几种情形分别验证之：

1° 当x，y，z皆不等于0。

如果$x\in X_1$，则有

$$((x\ast y)\ast(x\ast z))\ast(z\ast y)=\begin{cases}0, & y,\ z\in X_1,\\ ((0\ast y)\ast(0\ast z))\ast(z\ast y)=0, & y,\ z\in X_2,\\ ((0\ast y)\ast(x\ast z))\ast(0\ast y)=(0\ast y)\ast(0\ast y)=0, & y\in x_2,\ z\in X_1,\\ ((x\ast y)\ast(0\ast z))\ast z=(0\ast(0\ast z))\ast z=0, & y\in X_1,\ z\in X_2.\end{cases}$$

如果$x\in X_2$，则有

$$((x \ast y) \ast (x \ast z)) \ast (z \ast y) = \begin{cases} (x \ast x) \ast (z \ast y) \\ \quad = 0 \ast (z \ast y) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad y,\ z \in X_1, \\ 0, \qquad\qquad\quad y,\ z \in X_2, \\ (x \ast (x \ast z)) \ast z = 0, \\ \qquad\qquad y \in X_1,\ z \in X_2, \\ ((x \ast y) \ast x) \ast (0 \ast y) \\ \quad = (0 \ast y) \ast (0 \ast y) = 0, \\ \qquad\qquad y \in X_2,\ z \in X_1. \end{cases}$$

2° 当 $x = y = z = 0$ 时，显然有

$$((x \ast y) \ast (x \ast z)) \ast (z \ast y) = 0.$$

3° 当 $x = y = 0$，$z \neq 0$，则有

$$((x \ast y) \ast (x \ast z) \ast (z \ast y) = \begin{cases} (0 \ast 0) \ast z = 0, \qquad z \in X_1, \\ (0 \ast (0 \ast z)) \ast z = 0, \\ \qquad\qquad\qquad z \in X_2. \end{cases}$$

4° 当 $x = z = 0$，$y \neq 0$ 时有

$$((x \ast y) \ast (x \ast z)) \ast (z \ast y) = \begin{cases} ((0 \ast y) \ast 0) \ast (0 \ast y) \\ \quad = 0, \qquad\qquad y \in X_1, \\ ((0 \ast y) \ast 0) \ast (0 \ast y) \\ \quad = 0, \qquad\qquad y \in X_2, \end{cases}$$

5° 当 $y = z = 0$，$x \neq 0$ 时有

$$((x \ast y) \ast (x \ast z)) \ast (z \ast y) = \begin{cases} ((x \ast 0) \ast (x \ast 0)) \ast 0 \\ \quad = 0, \qquad\qquad x \in X_1, \\ ((x \ast 0) \ast (x \ast 0)) \ast 0 \\ \quad = 0, \qquad\qquad x \in X_2. \end{cases}$$

6° 当 $x = 0$，y，$z \neq 0$ 时有

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)=\begin{cases}0, & y,\ z\in X_2,\\ 0, & y,\ z\in X_1,\\ ((0*y)*(0*z))*z \\ \quad =(0*(0*z))*z=0, & y\in X_1,\ z\in X_2,\\ ((0*y)*(0*z)) \\ \quad *(0*y)=((0*y)*0) \\ \quad *(0*y)=0, & y\in X_2,\ z\in X_1.\end{cases}$$

7° 当 $y=0$，x，$z\neq 0$ 时有

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)=\begin{cases}0, & x,\ z\in X_1,\\ 0, & x,\ z\in X_2,\\ ((x*0)*(0*z))*(z*0) \\ \quad =(x*(0*z))*z \\ \quad =(0*(0*z))*z=0, & x\in X_1,\ z\in X_2,\\ ((x*0)*x)*z \\ \quad =0*z=0, & x\in X_2,\ z\in X_1.\end{cases}$$

8° 当 $z=0$，x，$y\neq 0$ 时有

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)=\begin{cases}0, & x,\ y\in X_1,\\ 0, & x,\ y\in X_2,\\ ((0*y)*x)*(0*y) \\ \quad =(0*y)*(0*y) \\ \quad =0, & x\in X_1,\ y\in X_2,\\ (x*x)*(0*y)=0*0 \\ \quad =0, & x\in X_2,\ y\in X_1.\end{cases}$$

这样，X总是满足Ⅰ-1。

综上，⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数。　　Q·E·D·

注　为了方便起见，我们以后把用（2）定义的一个BCK-代数和一个BCI-代数的并代数称为按LX意义的并代数。值得注意的是，如果在定理1中，X_1和X_2都是BCK-代数时，它们按（2）定义的（LX）并代数仍是一个BCK-代数，但是与它们的并代数（按定理Ⅱ·11·1）不必相同。因此，对于BCK-代数来讲，这给出了一种新的并代数。不过，从这个意义上来讲，（LX）并代数并不是BCK-代数的并代数在BCI-代数中的一种推广。所以，我们并不认为这是一种理想的构造并代数的方法。

§8　BCI-代数的理想

我们在第二章§8介绍过BCK-代数的理想。BCI-代数理论中也可引入理想概念。我们在这里作初步的介绍。

1．理想的概念

BCI-代数的理想是由K·Isēki在[20]中引入的，即有下列：

定义1　设⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数。X的一个非空子集A被称为一个理想，如果它满足：

$$0\in A。\qquad (1)$$

$$x\in A,\ y*x\in A\Rightarrow y\in A。\qquad (2)$$

例1　对于任意的BCI-代数⟨X；∗。0⟩，{0}和X都是这个BCI-代数的理想。{0}被称为它的平凡理想。

对于一个极端的情形，我们给出下列：

定义2〔注107〕　如果BCI-代数⟨X；∗，0⟩除了{0}和X外

没有其它的理想，那么称它为单 BCI-代数。否则，称为非单 BCI-代数。单代数又被称为具有单性的。

例 2 X_2 (I) 是一个单BCI-代数。

例 3 设X = { 0 , 1 , 2 , 3 }，X中的二元运算 ∗ 由下表给出：

∗	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0 ,

则⟨X； ∗， 0 ⟩是一个真 BCI- 代数，且是非单的，因为{ 0 ， 2 }是它的一个理想。

定义 3 [注108] BCI-代数⟨X； ∗， 0 ⟩的一个理想 A是X的一个真子集，则称之为一个真理想。

定义 4 [注109] BCI-代数⟨X； ∗， 0 ⟩的一切理想作成的集合记为ID (X) .

显然，有以下易知的事实：

$$ID(X) \subseteq P(X), \qquad (3)$$

$$2 \leqslant |ID(X)| \leqslant |P(X)|. \qquad (4)$$

在第二章 § 8 中我们曾经指出，对于 BCK-代数来说，上面的不等式两边的等号都是可以取得的，例 2 可以说明，(4) 中第一个不等号中可以取得等号，这是一个真 BCI- 代数的例子。那么是否存在一个真 BCI- 代数⟨X； ∗， 0 ⟩，使 |ID(X)| = |P(X)|呢？在回答这个问题之前，我们先给出下列两个结果：

定理 1 (K • Iséki, 〔20〕) . 每个BCI-代数 (X； ∗ , 0)

的BCK-部分B(X)是一个理想。

证 显然，$0\in B(X)$。设 $x\in B(X)$，$y*x\in B(X)$。则

$$0\leqslant x,\quad 0\leqslant y*x.$$

据第一个不等式及定理2.1的1），我们有

$$0\leqslant y*x\leqslant y*0=y,$$

即有 $0\leqslant y$，故 $y\in B(X)$。因为B(X)是一个理想。

Q·E·D·

定理2〔注110〕 设〈X；＊，0〉是一个BCI-代数。则〈B(X)；＊，0〉（作为一个BCK-代数）的每个理想A是X的一个理想。

证 由于A是B(X)的一个理想，因此A是B(X)的一个非空子集，而 $B(X)\subseteq X$，故A是X的一个非空子集。由于 $0\in A$，故（1）满足。设 $x\in A, y*x\in A$,其中 $y\in X$。于是，$x\in B(X)$，$y*x\in B(X)$。由于定理1，$y\in B(X)$。这样，在〈B(X)；＊，0〉中，由于A是一个理想，故 $x\in A$，$y*x\in A\Rightarrow y\in A$。

Q·E·D·

现在，我们来回答定理1前提出的那个问题，即有下列：

定理3〔注111〕 存在一个真BCI-代数〈X；＊，0〉，使

$$|ID(X)|=|P(X)|. \qquad (5)$$

证 由定理Ⅰ·8·1我们知道，我们可以构造一个BCK-代数〈Y；⅄，0〉，使

$$|ID(Y)|=|P(Y)|,$$

且

$$|Y|=\aleph_0.$$

我们将〈Y；⅄，0〉“一点扩张”，生成一个真BCI-代数〈X；＊，0〉。

这个真BCI-代数满足要求（5）。事实上，由定理2我们有：

$$ID(Y)\subseteq ID(X)\subseteq P(X),$$

但是，$|X| = |Y|$，故

$$|P(Y)| = |ID(Y)| \leqslant |ID(X)| \leqslant |P(X)| = |P(Y)|.$$

所以（5）成立。 Q·E·D·

这样，我们有下列：

定理 4〔注112〕 对于任意的BCI-代数〈X；$*$，0〉成立

$$2 \leqslant |ID(X)| \leqslant |P(X)|, \qquad (4)$$

其中两边不等式中的等号不能除去。 Q·E·D·

2．理想的性质

BCI-代数的理想有以下一系列的性质(其中有许多是BCK-代数的理想也具有的性质，且第二章没有给出，读者可自行去验证，我们在这里不一一注明了)。

定理 5〔注113〕 设A是BCI-代数〈X；$*$，0〉的一个理想，$x\in A$，$y\leqslant x$，则$y\in A$，从而初始段

$$A(x) = \{y\in X;\ y\leqslant x\}\subseteq A. \qquad (5)$$

证 同定理Ⅰ·8·3一样地证明。 Q·E·D·

注 定理5中作者引入了BCI-代数的初始段的概念。注意，$\forall x\in X$，0不必属于$A(x)$。所以$A(x)$一般地不必是一个理想，也不必是一个子代数。如果$0\in A(x)$，则$0\leqslant x$，故$x\in B(X)$。此时，如果$y\in A(x)$，则$y\leqslant x$，从而$y*x = 0\in B(X)$，由定理1，则$y\in B(X)$，故$A(x)\subseteq B(X)$。这就变成了BCK-代数的初始段了。

由定理5可知成立下列：

推论〔注114〕 设A是BCI-代数〈X；$*$，0〉的一个理想，

则

$$A = \cup\{A(x): x \in A\}. \qquad Q \cdot E \cdot D \cdot \qquad (6)$$

这里有一个问题要注意：BCI-代数的一个理想不必是它的一个子代数，而且一个子代数也不必是它的一个理想，可见以下二例：

例 4 设Q^*表示一切非零有理数作成的集合，则$\langle Q^*; \div, 1\rangle$是一个 BCI-代数，$Z^*$ 表示一切非零整数作成的集合，则 Z^* 是$\langle Q^*; \div, 1\rangle$的一个理想，但$Z^*$ 不是一个子代数，因Z^*对$\div$不封闭。

例 5 设$X = \{0, 1, 2, 3\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	2	1	0	0
3	3	3	3	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数（从而也是一个BCI-代数）。$A = \{0, 1\}$是它的一个子代数，但不是一个理想，因$1 \in A$，$2 * 11 = 1 \in A$，但$2 \bar{\in} A$。

定理 6〔注115〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，A是X的一个理想，且是X的一个子代数，$D \subseteq A$。则D是X的一个理想的充要条件是D是A的一个理想。

证 “$\Rightarrow$”。设D是X的一个理想，故$0 \in D$，设$x \in D$，$y * x \in D$，其中$y \in A$。由于$y \in A \subseteq X$，而D是X的一个理想，故$y \in D$。

“$\Leftarrow$”。由于A是X的一个理想，故$0 \in A$，又因D是A的

一个理想，因此，$0 \in D$。设 $x \in D$，$y * x \in D$，其中 $y \in X$。由于$D \subseteq A$，故

$$x \in A,\ y * x \in A \Rightarrow y \in A,$$

后一蕴涵式成立是因为A是X的一个理想. 这样，由于 D 是 A的一个理想，故

$$x \in D,\ y * x \in D \Rightarrow y \in D.$$

故D是X中的一个理想　　　　　　　　　Q·E·D·

这个定理的充分性是定理 2 的一个推广。

定理 7〔注116〕　设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个 BCI-代数. $\varnothing \neq \mathscr{U} \subseteq ID(X)$，则$\cap \mathscr{U}$是X的一个理想。

证　因为 0 ∈每一个理想，故 $0 \in \cap \mathscr{U}$。

设 $x \in \cap \mathscr{U}$，$y * x \in \cap \mathscr{U}$。对于任意的$A \in \mathscr{U}$，则

$$x \in A,\ y * x \in A \Rightarrow y \in A \Rightarrow y \in \cap \mathscr{U}.$$　　　Q·E·D·

定理 8　（雷天德，〔15〕）。设f是BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到BCI-代数$\langle X_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$的一个同态映射，则$Ker(f)$是X的一个理想。

证　因$0 \in Ker(f)$，故$Ker(f)$满足（1）。

设　$x \in Ker(f)$，$y * x \in Ker(f)$，$y \in X$。则

$$0_1 = f(y * x) = f(y) *_1 f(x) = f(y) *_1 0_1,$$

故 $f(y) \leqslant 0_1$，从而 $f(y) = 0_1$，即有 $y \in Ker(f)$。

Q·E·D·

注意，$Ker(f) = f^{-1}(0_1)$，而$\{0_1\}$是 X_1 中 的 一 个 理 想。那么对于X_1中的任意一个理想子集A_1，$f^{-1}[A_1]$是否X 的一个理想呢？下列结果给这个问题以肯定回答，从而推广了雷天德的定理 8 。

定理 9〔注117〕　设 f是BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到 BCI-代数

$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$上的一个同态映射。若$A_1$是$X_1$的一个理想，则$f^{-1}$ $[A_1]$是X的一个理想。

证 由于$f(0)=0_1\in A_1$，故$0\in f^{-1}[A_1]$

设$x\in f^{-1}[A_1]$，$y*x\in f^{-1}[A_1]$，$y\in X$。于是，

$$f(x)\in A_1,\ f(y*x)=f(y)*_1 f(x)\in A_1,$$

因A_1是X_1的一个理想，故$f(y)\in A_1$，即$y\in f^{-1}[A_1]$。

Q·E·D·

定理10[注118] 设$\langle X; *, 0\rangle$是一族BCI-代数$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle: \alpha\in I\}$的积代数。若对于每个$\alpha\in I$，$A_\alpha$是$X_\alpha$的一个理想，则$A=\Pi\{A_\alpha: \alpha\in I\}$是X的一个理想。

证 显然，$0\in A$。设$f\in A, g*f\in A$。对于任意的$\alpha\in I$，因为A_α是X_α的一个理想，故

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha)\in A_\alpha, \\ (g*f)(\alpha)=g(\alpha)*_\alpha f(\alpha)\in A_\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow g(\alpha)\in A_\alpha,$$

从而$g\in A$。 Q·E·D·

注 定理9-10中“理想”换成“真理想”的适当命题也成立，这里不一一列举。

3．由子集A生成的理想

类似于BCK-代数理论，我们先引进BCI-代数中由子集生成的理想的概念。

定义5[注119] 设A是BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$的一个非空子集，称包含A的最小理想为由A生成的理想，记为[A]。（也可规定$(\varnothing\rangle=\{0\}$·）

对于BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$的一个非空子集A，(A)是否存在呢？这个问题的回答是肯定的，即有有列：

定理11[注120] 对BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$的每一个非空子集

A存在X的一个包含A的最小理想。

证 命$(A] = \cap ID(X, A)$即可，其中

$$ID(X, A) = \{D \subseteq X: D\text{是}X\text{的一个理想，且} A \subseteq D\}. \quad (7)$$

（根据定理7） Q·E·D·

在BCI-代数中，类似于定理Ⅰ·8·10的一个结果也成立。注意定理Ⅰ·8·10证明中要用到公理K-4，所以要在BCI-代数中得到类似结果必须克服这一困难。作者在〔35〕中已经得到和证明了这一结果，即有下列：

定理12〔注121〕 设M是BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$的一个子集，则唯一地存在包含M的最小理想$(M]$，且命$M^* = M \cup \{0\}$，则

$$(M] = \{x \in X: \exists a_1, \cdots, a_n \in M^*, (\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_n = 0\}. \quad (8)$$

证 $(M]$的存在性及唯一性实际上已由定理11解决了。注意，$(\varnothing] = \{0\}$也满足（8）。下面设M是X的任一非空子集，证（8）成立。我们命

$$N = \{x \in X: \exists a_1, \cdots, a_n \in M^*, (\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_n = 0\}.$$

欲证$(M] = N$，我们分作以下几步：

1° 显然，$M \subseteq N$。因为$\forall x \in M$，$\exists a_1 = x \in M \subseteq M^*$，使得$x * a_1 = x * x = 0$。

2° N是X中的一个理想。

事实上，由于$0 * 0 = 0$，故$0 \in N$。

再设$x \in N$，$y \in X$，且$y * x \in N$，则由N的定义知，$\exists a_1, \cdots, a_n$，$b_1, \cdots, b_k \in M^*$，使得

$$(\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_n = 0, \quad (8')$$

及

$$(\cdots((y*x)*b_1)*\cdots)*b_k=0. \qquad (9)$$

由于$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，故由定理2·3可知，（9）式可变为

$$((\cdots(y*b_1)*\cdots)*b_k)*x=0,$$

即有

$$(\cdots(y*b_1)*\cdots)*b_k\leqslant x.$$

由定理2·5有

$$(\cdots(y*b_1)*\cdots)*b_k)*a_1)*\cdots)*a_n$$
$$\leqslant(\cdots(x*a_1)*\cdots)*a_n=0,$$

后一等式是因为（8′）。由公理Ⅰ-5知

$$(\cdots(y*b_1)*\cdots)*b_k)*a_1)*\cdots)*a_n=0.$$

所以，$y\in N$。因此N是一个理想。

由1°和2°知，$(M]\subseteq N$。

3°再证对于包含M的任一理想S有$N\subseteq S$。

事实上，由于S是一个理想，则$0\in S$。现任取$x\in N$，由N的定义，存在M^*中的元素a_1，…，a_n，使

$$(\cdots(x*a_1)*\cdots)*a_n=0\in S.$$

又因S是一个理想，及$a_n\in M^*\subseteq S$，故

$$(\cdots(x*a_1)*\cdots)*a_{n-1}\in S.$$

继续如此“脱皮”$n-2$次，便有

$$\left.\begin{array}{r}x*a_1\in S_1\\ a_1\in S_1\end{array}\right\}\Rightarrow x\in S.$$

故$N\subseteq S$。

因此$(M]=N$。　　Q·E·D·

由定理12可得下列：

推论 若M是BCI-代数⟨X；∗，0⟩的任一理想，则(M]=M。特别地(B(X))=B(X)。 Q·E·D·

4．关于理想的几个概念

在本节的最后，作者介绍关于理想的几个概念。限于篇幅，我们不在这里对它们作详细的讨论。

定义6〔注122〕 设⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数。一个非空子集$A\subseteq X$被称为一个关联理想，如果

$$0\in A. \tag{1}$$

$$(y*x)*z\in A,\ x*z\in A\Rightarrow y*z\in A. \tag{10}$$

例6 设⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数，则X是一个关联理想。

同定理Ⅱ·8·7一样我们有：

定理13〔注123〕 设⟨X；∗，0⟩是BCI-代数，则X的任何关联理想是一个理想。

证 可同定理Ⅱ·8·7的证明一样证明之。 Q·E·D·

定义7〔注124〕 设⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数，X的理想A被称为是极大的，如果A满足：

1）A是一个真理想。

2）A不是X的任何真理想的一个真子集，即如B是X的一个理想，且$B-A\neq\varnothing$，则B=X。

例7 例2中A={0，2}就是⟨X；∗，0⟩的一个极大理想。

§9 BCI-代数的商代数

作为从已知BCI-代数产生新BCI-代数的手段，如BCK-代

数那样，在BCI-代数中已引入了子代数和积代数。那么是否象BCK-代数那样利用理想而引入一个BCI-代数的商代数呢？这是一些作者考虑过的问题。雷天德在〔15〕中利用理想引入BCI-代数的商代数。下面我们来介绍这一工作。

首先，定理Ⅱ.9.1可完全地（包括证明）搬到BCI-代数中，即有下列：

定理1 （雷天德，〔15〕）．设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，A是一个理想。在X中定义一个二元关系～如下：

$$\forall x, y\in X,\ x\sim y \quad \text{iff}\ x*y\in A \text{和} y*x\in A. \tag{1}$$

则～是X中的一个等价关系。 Q·E·D·

定义1 以～把X的元素分成等价类，C_x表示x所在的类，一切等价类的集合记为X/A，称为商集。

定义2 在商集X/A中定义一个二元运算$*$如下：

$$C_x * C_y = C_{x*y}. \tag{2}$$

可以证明下列：（由于定理Ⅱ·9·3的证明没有用到K－4，故完全同样地可证）

定理2 （雷天德，〔15〕）．商集X/A中的二元运算$*$是良好定义的。

定理3 （雷天德，〔15〕），设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，A是X的一个理想，则$\langle X/A; *, C_0\rangle$是一个BCI-代数，称为$\langle X; *, 0\rangle$关于A的商代数，或简称商代数。

证 在X/A中定义≤：

$$C_x\leqslant C_y \text{iff} C_x * C_y = C_{x*y} = C_0. \tag{3}$$

易知，

$$x\leqslant y\Rightarrow C_x\leqslant C_y \tag{4}$$

公理Ⅰ-1，Ⅰ-2，Ⅰ-3，Ⅰ-4可完全同定理Ⅱ·9·4那样去证。下面证Ⅰ—5成立。设

$$C_x \leq C_0.$$

则 $C_x * C_0 = C_0$。故 $x = x * 0 \sim 0$。从而 $C_x = C_0$。

Q·E·D·

注 BCI-代数的商代数与BCK-代数的商代数从构造方式上是一样的，但是两者之间存在一定的差别，如在BCK-代数中存在"$C_0 = A$"，但是对于BCI-代数的商代数来说这个结果不真，可见例2。

下面我们来看两个例子：

例1　设X＝{0，1，2}，X中的二元运算∗由下表给出：

∗	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个BCI-代数，$A = \{0, 1\}$ 是X的一个理想，且

$$X/A = \{C_0, C_2\} = \{\{0, 1\}, \{2\}\}.$$

X/A中的运算∗的表是：

∗	C_0	C_2
C_0	C_0	C_2
C_2	C_2	C_0

显然，$\langle X/A; *, 0_0\rangle$ 是与 $X_2(I)$ 同构的。（亦即与子代数

$\langle\{0, 2\}; *, 0\rangle$同构。）

注意，从这个例子可知，这里的商代数并不象在有限群论里那样，商代数的阶一定是原代数X的阶的因子；不同的等价类中元的个数一定相等。

例 2 设Q^*表示一切非零有理数的集合，则$\langle Q^*; \div, 1\rangle$是一个BCI-代数。一切非零整数的集合$Z^*$是一个理想，但在$Q^*/Z^*$中$C_1 = \{1, -1\} \neq Z^*$。

我们再来考察一下商集X/A，可有下列结果：

定理 4 （雷天德，〔15〕）。设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，A是一个理想，$\langle X/A; *, C_0\rangle$是一个商代数。则成立：

1） $C_0 \subseteq A$。

2） C_0是X的一个子代数，也是X的一个理想。

3） $A = \bigcup\{C_x : x \in A\}$。

4） $S = \{C_x : x \in A\}$是X/A的一个理想。

证 1） 设$a \in C_0$，则$a \sim 0$。从而$a = a * 0 \in A$，故$C_0 \subseteq A$。

2） 由于$0 \in C_0$。设$x, y \in C_0$。于是$C_x = C_0, C_y = C_0$，因此
$$C_{x*y} = C_x * C_y = C_0 * C_0 = C_0,$$
故$x * y \in C_0$。因此C_0是一个子代数。

设$x \in C_0$，$y * x \in C_0$，故$C_x = C_0$，$C_{y*x} = C_0$。从而
$$C_y = C_{y*0} = C_y * C_0 = C_y * C_x = C_{y*x} = C_0,$$
故$y \in C_0$。所以C_0是一个理想。

3） $\forall a \in A$，如果$x \sim a$（即$x \in C_a$），则$x * a \in A$。因A是理想，$a \in A$，从而$x \in A$。故$C_a \subseteq A$，从而$\bigcup\{C_x : x \in A\} \subseteq A$。另一方面，$\forall a \in A$，$a \in C_a$，故$A \subseteq \bigcup\{C_x : x \in A\}$。所以$A = \bigcup$

$\{C_x : x\in A\}$。

4）显然，$C_0\in S$。设$C_x\in S$，$C_y * C_x\in S$。那么$C_{y*x}\in S$，故$y*x\in A$。又因$C_x\in S$，故$x\in A$，从而$y\in A$（因A是理想），即有$C_y\in S$。所以S是X/A的一个理想。

Q·E·D·

类似于 BCK-代数中的可商性及逆可商性，这里可给出下列：

定义 3〔注125〕 如果BCI-代数〈X；*，0〉具有性质P，A为它的任一理想，可证得商代数〈X/A；*，C_0〉也具有性质P，称P为一个可商性，如果商代数〈X/A；*，C_0〉具有性质P，能证明〈X；*，0〉也具有性质P，称P为逆可商性。

我们在这里给出一个可商性，即下列：

定理 5〔注126〕 单性（即是单代数的性质）是一个可商性。

证 设〈X；*，0〉是一个单BCI-代数，因此，它只有两个理想：X和{0}。

对于理想X，商代数〈X/X；*，C_0〉实际上只有C_0一个元素，因此它是单的。

对于理想{0}，商代数〈X/{0}；*，C_0〉是和X同构的，因此它也是单的。

注 单性不是逆可商性。例如，例1中X/A是单的，但〈X；*，0〉不是单的。

我们在以后各章节将陆续给出一些可商性和逆可商性。

下面我们来讨论一下商代数的一些性质。

定义 4〔注127〕 设〈X；*，0〉是一个BCI-代数，A是X的一个理想，〈X/A；*，C_0〉是它的商代数。对于任意的$x\in X$，命

$$P_A: X \longrightarrow X/A,$$
$$x \longmapsto C_x, \qquad (5)$$

称P_A为从BCI-代数〈X；$*$，0〉到它的商代数〈X/A；$*$，C_0〉上的典则映射。当A确定时，也简记P_A为P。

定理 6〔注128〕 典则映射P_A是一个同态映射。

证 对于X中任二元素x和y我们有：

$$P_A(x*y) = C_{x*y} = C_x*C_y = P_A(x)*P_A(y). \qquad (6)$$

故P_A是一个同态映射。 Q·E·D·

类似于定理Ⅱ·12·8（完全同样地证明）可有下列：

定理 7 （雷天德，〔15〕）．设f是BCI-代数〈X_1；$*_1$，0_1〉到BCI-代数〈X_2；$*_2$，0_2〉的一个同态，则Ker(f)是X_1的一个理想。 Q·E·D·

完全同定理Ⅱ·12·9的证明可有下列：

定理 8 （雷天德，〔15〕）．设f是BCI-代数〈X_1；$*_1$，0_1〉到BCI-代数〈X_2；$*_2$，0_2〉上的一个同态。则f是一个同构的充要条件是Ker(f)＝{0}。 Q·E·D·

完全同定理Ⅱ·12·10的证明可以得到下列：

定理 9〔注129〕 设f是BCI-代数〈X；$*$，0〉到BCI-代数〈Y；$\curlywedge$，θ〉的一个同态。如果{θ}是Y的一个关联理想，则Ker(f)是X的一个关联理想。 Q·E·D·

类似于定理Ⅱ·12·12有下列：（证明也同样）

定理10 （雷天德，〔15〕）．设f是从BCI-代数〈X；$*$，0〉到BCI-代数〈X′；$*'$，0′〉上的一个同态，那么商代数〈X/Ker(f)；$*$，C_0〉≃〈X′；$*'$，0′〉。

Q·E·D·

注 在商代数$\langle X/Ker(f);\ *, C_0\rangle$中$C_0=Ker(f)$。事实上，由定理4的1）知，$C_0\subseteq Ker(f)$。另一方面$x\in Ker(f)$，$y\in Ker(f)$，则$f(x*y)=f(x)*'f(y)=0'*'0'=0'$，因此$x*y\in Ker(f)$（即$Ker(f)$是一个子代数）。特别地$x*0\in Ker(f)$，$0*x\in Ker(f)$。于是$x\sim 0$，即$x\in C_0$，故$Ker(f)\subseteq C_0$。因此，有$C_0=Ker(f)$。

我们在定理8·11的证明中引入了ID(X，A)这个记号，表示包含非空集A的一切理想作成的集合。由于$X\in ID(X, A)$，故显然有

$$\varnothing\neq ID(X, A)\subseteq ID(X). \tag{7}$$

类似于定理Ⅱ·9·12和定理Ⅱ·9·13我们分别有：

定理11[注130] $ID(X)=ID(X, A)$ iff $A=\{0\}$.

Q. E. D.

定理12[注131] 设A是BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$的一个非空子集。在ID(X，A)中对于任意的Y，$Z\in ID(X, A)$，命

$$Y\vee Z=Y\cap Z, \tag{8}$$

$$Y\vee Z=(Y\cup Z], \tag{9}$$

则（ID(X，A)，$\wedge$，$\vee$）是一个格，且(A]是最小元，X是最大元。 Q·E·D·

下面，我们进一步讨论一下，当A是一个理想时。ID(X，A）和ID(X/A)的关系。类似于引理Ⅱ·9·2的证明，我们易知成立下列：

定理13[注132] 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个BCI-代数，A是X的一个理想，$\langle X/A;\ *,\ C_0\rangle$是商代数。设$J\in ID(X, A)$，则

$$J/A=\{C_x: x\in J\} \tag{10}$$

是X/A的一个理想。 Q·E·D·

注 这个结果推广了雷天德的定理4的4）．

同引理Ⅰ·9·3一样，由于上述定理的证明没有用到“$A\subseteq J$”这个条件，故有下列：

定理14〔注133〕 设A是BCI-代数$\langle X;*,0\rangle$的一个理想，$\langle X/A;*,C_0\rangle$是商代数。如果$J\in ID(X)$，则J/A是X/A中的理想。 Q·E·D·

同引理Ⅰ·9·4那样证明，可有下列：

定理15〔注134〕 在定理13的条件下，命

$$\left.\begin{array}{l} P:ID(X,A)\longmapsto ID(X/A), \\ \qquad J\longrightarrow J/A, \end{array}\right\} \qquad (11)$$

则P是从ID（X，A）到ID（X/A）的一个单射。

Q·E·D·

注 在BCK-代数的情形下进一步可证P是一个双射．但在BCI-代数的情形下，由于只有$C_0\subseteq A$，而不必$C_0=A$，这样J/A的理想$\{C_0\}$所对应的理想J（按(10)）未必属于$ID(X,A)$，从而P不必是满映射．反例取例2即可．

对于BCK-部分我们有下列结果：

定理16 〔注135〕设$\langle X;*,0\rangle$是一个BCI-代数，A是一个理想，$\langle X/A;*,C_0\rangle$是商代数，P是典则映射，则

$$P[B(X)]\subseteq B(X/A). \qquad (12)$$

证 设$x\in B(X)$，则$0\leqslant x$．由（4）知$C_0\leqslant C_x$，故$P(x)=C_x\in B(X/A)$．所以（12）成立． Q·E·D·

对于子代数我们有下列结果：

定理17〔注136〕 在定理16的条件下，

1）如果D是X的一个子代数，则P[D]是X/A的一个子代数。

2）如果E是X/A的一个子代数，则P^{-1}〔E〕是X的一个子代数。

证　1）由于$0\in D$，故$C_0=P(0)\in P$〔D〕。

设$C_x\in p$〔D〕，$C_y\in p$〔D〕，其中$x\in D$，$y\in D$。由于D是一个子代数，故$x*y\in D$。而

$$C_x*C_y=C_{x*y}=p(x*y)\in D.$$

即p〔D〕是一个子代数。

2）由于E是X/A的一个子代数。故$C_0\in E$.因$p(0)=C_0$，从而$0\in p^{-1}$〔E〕。设x，$y\in p^{-1}$〔E〕，则C_x，$C_y\in E$。由于E是一个子代数，从而

$$p(x*y)=C_{x*y}=C_x*C_y\in E.$$

故$x*y\in p^{-1}$〔E〕。因此p^{-1}〔E〕是X的一个子代数。

Q·E·D·

第四章　BCI-代数理论中的几个专题

在第三章介绍了BCI-代数的基本概念及主要性质的基础上，我们从这一章起介绍BCI-代数理论研究中的几个专题。我们将在第五章中集中介绍结合BCI-代数及其推广的一些研究成果，在第六章中介绍BCI-拓扑代数。除了这两个方面的题材外，其它的几个主要专题我们先放在本章中作介绍。

§1　拟可换的BCI-代数

在这一节中我们先来介绍一类BCI-代数，所谓的拟可换的BCI-代数。我们在第三章曾经讲过，在BCI-代数中不必研究可换性、有界性、正定关联性、关联性、完备性及局部完备性。那么，在BCI-代数中可研究什么性质呢？迄今，从代数类的角度讲，我们只研究过单性，即单BCI-代数。应当说，BCI-代数中可研究的性质还是很多的。从代数类的角度来看，这些性质大体可分为两类，一类是BCK-代数中有的，而在BCI-代数中也有，这样的性质称之为推广性质；另一类是BCI-代数所固有的，而BCK-代数类中只有平凡的才具有，这样的性质称之为固有性质[注137]。我们在这一节要介绍的拟可换性自然是属于前一类的。

1．拟可换BCI-代数的概念

类似于H·Yutani在BCK-代数中引进拟可换性，1980年K·Iséki在BCI-代数中引进了拟可换性。

定义1 （K·Iséki，〔22〕。）设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数。变量x和y（$\in X$）的一个多项式$Q_{m, n}(x, y)(m,n\in\omega)$归纳地定义于下：

$$\left.\begin{aligned} &Q_{0,0}(x, y)=x*(x*y),\\ &Q_{m+1, n}(x,y)=Q_{m, n}(x, y)*(x*y),\\ &Q_{m, n+1}(x, y)=Q_{m, n}(x,y)*(y*x). \end{aligned}\right\}\quad (1)$$

定义2 （K·Iséki，〔22〕。）设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，若存在一组非负整数i，j，m，n，使对于X中的任意两个元素x和y都成立

$$Q_{i, j}(x, y)=Q_{m, n}(y, x), \quad (2)$$

则X叫做一个（i，j；m，n）型拟可换BCI-代数。

注 （0，0；0，0）型拟可换性即可换性，我们不必再考虑它了。

2．拟可换BCI-代数的存在性

在作了定义2以后面临的一个问题是：存在拟可换的真BCI-代数吗？只有找出这样的例子，拟可换性在BCI-代数中才有意义。K·Iséki首先解决了这个问题。

定理1 （K·Iséki，〔22〕·）存在拟可换的真BCI-代数。

Q·E·D·

证 见下列例1．

例1 设$X=\{0, 1, a\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	a
0	0	0	a
1	1	0	a
a	a	a	0，

则⟨X；$*$，0⟩是一个（1，0；0，0）型拟可换的真BCI-代数。

注 我们来分析一下例1中的BCI-代数。它是由I_2用"一点扩张"的方法生成的。而I_2是一个（1，0；0，0）型拟可换的BCI-代数。那么，一般地，一个（1，0；0，0）型拟可换的BCK-代数用"一点扩张"的方法生成的真BCI-代数是否拟可换的呢？这个问题首先被K·Isēki肯定地予以回答，即有下列：

定理2 （K·Isēki，〔22〕.）由一个（1，0；0，0）型拟可换的BCK-代数用"一点扩张"生成的真BCI-代数是（1，0；0，0）型拟可换的。

证 设⟨X；$*$，0⟩是一个（1，0；0，0）型的拟可换的BCK-代数。命⟨X∪{a}；$*$，0⟩是由⟨X；$*$，0⟩用"一点扩张"生成的真BCI-代数。为证⟨X∪{a}；$*$，0⟩是（1，0；0，0）型拟可换的，我们只要验证：对于任意的$x\in X$，成立

$$Q_{1,0}(x, a)=Q_{0,0}(a, x), \tag{3}$$

$$Q_{1,0}(a, x)=Q_{0,0}(x, a). \tag{4}$$

这一点由下列引理即知。

Q·E·D·

引理1 设⟨Y∪{a}；$*$，0⟩是由BCK-代数⟨X；$*$，0⟩"一点扩张"生成的真BCI-代数，则对于任意的$x\in X$成立（3）

和（4）。

证 因

$$Q_{1,0}(x,a)=(x*(x*a))*(x*a)=a*a=0,$$

$$Q_{0,0}(a,x)=a*(a*x)=a*a=0;$$

$$Q_{1,0}(a,x)=(a*(a*x))*(a*x)=0*a=a,$$

$$Q_{0,0}(x,a)=x*(x*a)=x*a=a.$$

Q·E·D·

3．对合群。

我们再来看一些拟可换的BCI-代数，它们与群论中的对合群（见定义I．3．3）联系了起来。

例2 设$S_2=\{0, a\}$，S_2中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	a
0	0	a
a	a	0

，

则（S_2，$*$）是一个对合群，0是恒等元。另一方面，$\langle S_2; *, 0\rangle$是一个（1，0；0，0）或（0，1；0，0）型的一个拟可换的BCI-代数。

例3 设$X=\{1, a, b, c\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

，

则（X，$*$）是以1为恒等元的一个四元对合群，它还可以看为两个二元对合群的乘积（同构地）。另一方面，〈X；$*$，1〉是一个（1，0；0，0）或（0，1；0，0）型的一个可拟可换的BCI-代数。

一般地，有下列结果：

定理3 （K·Iséki，〔22〕。）如果（X，$*$）是一个以0为恒等元的任意对合群，那么〈X；$*$，0〉是一个（1，0；0，0）型或（0，1；0，0）型的拟可换的BCI-代数。

证 因为（X，$*$）是一个对合群，故满足结合律，且对于任意的$x\in X$；$x*x=0$。因此它满足I-3。下面验证：

1）满足I-1。因对于任意的x，y，$z\in X$有

$$
\begin{aligned}
&((x*y)*(x*z))*(z*y)\\
&=(x*y)*((x*(z*z))*y)\\
&=(x*y)*((x*0)*y)\\
&=(x*y)*(x*y)\\
&=0.
\end{aligned}
$$

2）满足I-2。因对于任意的x，$y\in X$有

$$(x*(x*y))*y=(x*x)*(y*y)=0*0=0.$$

3）满足I-4。设x，$y\in X$，满足

$$x*y=y*x=0.$$

因

$$x*y=0,$$

故

$$(x*y)*y=0*y=y,$$

另一方面，又有

$$(x*y)*y=x*(y*y)=x*0=x,$$

故 $x=y$。

4）满足 I－5。设$x\in X$，使 $x*0=0$。由于 $x*0=x$，故 $x=0$。

这就证得$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个BCI-代数。再作如下计算：

$$Q_{1,0}(x,\ y)=(x*(x*y))*(x*y)$$
$$=x*((x*y)*(x*y))=x*0=x,$$
$$Q_{0,0}(y,\ x)=y*(y*x)=(y*y)*x=0*x=x,$$

故成立

$$Q_{1,0}(x,\ y)=Q_{0,0}(y,\ x);$$
$$Q_{0,1}(x,\ y)=(x*(x*y))*(y*x)$$
$$=(x*x)*((y*y)*x)$$
$$=0*(0*x)=x,$$

从而成立

$$Q_{0,1}(x,\ y)=Q_{0,0}(y,\ x).$$

因此，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个（1，0；0，0）型或（0，1；0，0）型的拟可换的BCI-代数。

Q·E·D·

注 当$|X|\leqslant 2$时，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个真BCI-代数；而当$X=\{0\}$时，它是平凡的BCK-代数。

定理3的条件可适当减弱。我们在定义Ⅰ·6·3中曾介绍过半群的概念。我们可以得到下列结果：

定理 4 （K·Iséki，〔22〕。）设（X，$*$）是一个半群，具有右恒等元0，即

$$x*0=x,\ \forall x\in X,$$

且每个元素皆是对合，即 $x*x=0$，$\forall x\in X$。那么，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个（1，0；0，0）或（0，1；0，0）型的拟可换的

BCI-代数.

证 先证$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数. 满足Ⅰ-1, Ⅰ-2, Ⅰ-3, Ⅰ-5的证明同定理3的证明.

满足Ⅰ-4. 设$x, y\in X$, 满足

$$x*y=y*x=0. \tag{5}$$

由于(5), 故

$$(x*y)*y=(y*x)*y,$$

从而(因$y*y=0$及$y*x=0$)

$$x*0=y*0;$$

于是(因0是右恒等元)

$$x=y.$$

这就证得$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数.

在计算之前, 我们先证一个事实, 即半群$(X; *)$是交换的, 即

$$x*y=y*x, \ \forall x, y\in X. \tag{6}$$

事实上, 由于

$$x*x=y*y=0.$$

故

$$(y*(x*x))*y=(x*(y*y))*x=0.$$

于是

$$(y*x)*(x*y)=(x*y)*(y*x)=0,$$

由Ⅰ-4即得

$$x*y=y*x.$$

下面计算:

$$Q_{1,0}(x, y)=x \quad (\text{同定理3证明}),$$

$$Q_{0,0}(y, x)=y*(y*x)=(y*y)*x=0*x=x*0$$

$$
\begin{aligned}
&= x; \\
Q_{0,1}(x, y) &= (x*(x*y))*(y*x) \\
&= ((x*x)*(y*y))*x \\
&= 0*x = x*0 = x, \\
Q_{0,0}(y, x) &= y*(y*x) = x.
\end{aligned}
$$

故⟨X; $*$, 0⟩是一个(1, 0; 0, 0)型或(0, 1; 0, 0)型的拟可换的BCI-代数。 Q·E·D·

由定理4及其证明我们可以有下列关于半群的结果：

推论 设(X, $*$)是一个具有右恒等元e和每个元素皆为对合的半群，则成立：

1) $\forall x, y \in X$, $x*y = y*x = e \Rightarrow x = y$.

2) $\forall x, y \in X$, $x*y = y*x$.

3) e也是一个左恒等元，从而e是一个恒等元。

4) $\forall x, y \in X$, $(x*(x*y))*(x*y) = y*(y*x)$
$= (x*(x*y))*(y*x) = x$.

Q·E·D·

4. Isēki的高型拟可换BCI-代数问题

我们在前面看到的$(i, j; m, n)$型拟可换的真BCI-代数中，皆是

$$0 \leqslant \max\{i, j, m, n\} \leqslant 1 \tag{7}$$

自然应当考虑是否存在较高型的拟可换的真BCI-代数。K·Isēki 1980年在〔22〕中提出了下列：

问题 存在高型$(i, j; m, n)$的拟可换的(真)BCI-代数吗？

这里，应对"高型"这个概念予以明确定义。

定义3〔注138〕 设⟨X; $*$, 0⟩是一个BCI-代数，且是$(i,$

j; m, n）型拟可换的。如果（7）成立，称之为低型的；如果

$$\max\{i, j; m, n\} \geqslant 2, \tag{8}$$

则称之为高型的。

对于Iséki的这个问题，作者1982年在〔34〕中已经解决，有关的工作和结果作者将在第五章中予以叙述和论证。这里，列出如下主要结果：

定理5〔注139〕 任何结合的真BCI-代数是一个（i, j; m, n）型的拟可换的真BCI-代数，其中i，j；m，n皆是非负整数，且$i+j$与$m+n$不同奇偶。 Q·E·D·

定理6〔注140〕 存在任意2^p阶的（i, j; m, n）型的拟可换的结合的真BCI-代数，其中p，i，j，m，n皆是非负整数，且$i+j$与$m+n$不同奇偶。 Q·E·D·

由于结合BCI-代数亦是一个对合群（见第五章§2），故它也是（1，0；0，0）或（0，1；0，0）型的拟可换BCI-代数。这样结合BCI-代数是高型的BCI-代数，又是低型的拟可换的BCI-代数。因此，我们应当考虑是高型的拟可换的BCI-代数，而不是低型的。对于这种高型拟可换的BCI-代数我们应当另外给以定义。

定义4〔注141〕 若高型的拟可换BCI-代数〈X；∗，0〉不是低型的，则称它为纯高型的拟可换的BCI-代数。

陕西师大数学系研究生惠昌常、代跃进在1983年4月给出了一个纯高型的拟可换的BCI-代数，即下列：

例4 设X＝{0，1，2，3}，X中的二元运算∗由下表给出：

*	0	1	2	3
0	0	0	0	3
1	1	0	0	3
2	2	1	0	3
3	3	3	3	0,

则〈X；*，0〉是一个（2，0；0，1）型拟可换的BCI-代数，而不是低型的。

5．拟可换BCI-代数的乘积

例3中的BCI-代数〈X；*，0〉（0即为该例中的1）是（1，0；0，0）型的或（0，1；0，0）型的拟可换的BCI-代数，它还是两个同型的拟可换BCI-代数的乘积。那么，一般地同型拟可换的BCI-代数的乘积是否同型的拟可换的BCI-代数呢？作者给这个问题以肯定的回答，即有下列：

定理7〔注142〕 设〈X；*，0〉是一族BCI-代数$\{\langle X_a; *_a, 0_a\rangle : a\in I\}$的积代数。则〈X；*，0〉是$(i, j; m, n)$型拟可换的当且仅当对于任意的$a\in I$，$\langle X_a; *_a, 0_a\rangle$是$(i, j; m, n)$型拟可换的。

证 "⇐"．设$\forall a\in I$，$\langle X_a; *_a, 0_a\rangle$是$(i, j; m, n)$型拟可换的BCI-代数。对于X中的任意两个元素$f$，$g$，有

$$Q_{i,j}(f, g)(a)$$

$$=(\cdots(f*(f*g))*\underbrace{(f*g)*\cdots)*(f*g)}_{i})$$

$$*\underbrace{(g*f))*\cdots)*(g*f)}_{j})(a)$$

$$=(\cdots(f(a)*_a(f(a)*_a g(a)))*_a(f(a)$$

$$*\underbrace{ag(\alpha)*\alpha\cdots)*\alpha(f(\alpha)*\alpha g(\alpha))}_{i}*\alpha(g(\alpha)$$

$$*\underbrace{\alpha f(\alpha))*\alpha\cdots)*\alpha(g(\alpha)*\alpha f(\alpha))}_{j}$$

$$=(\cdots(g(\alpha)*\alpha(g(\alpha)*\alpha f(\alpha))*\alpha(g(\alpha)$$

$$*\underbrace{\alpha f(\alpha))*\alpha\cdots)*\alpha(g(\alpha)*\alpha f}_{m}(\alpha)*\alpha*\alpha(f(\alpha)$$

$$*\underbrace{\alpha g(\alpha))*\alpha\cdots)*\alpha(f(\alpha)*\alpha g(\alpha))}_{n}$$

$$=(\cdots(g*(g*f))*(g*\underbrace{f)*\cdots)*(g*f)}_{m})$$

$$*(\underbrace{f*g)*\cdots)*(f*g}_{n}))(\alpha)$$

$$=Q_{m,n}(g,\ f)(\alpha),$$

由于 α 是 I 中的任意元素，故

$$Q_{i,j}(f,\ g)=Q_{m,n}(g,\ f).$$

因此，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是 $(i,\ j;\ m,\ n)$型的拟可换的 BCI-代数。

"⇒"．设积代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是 $(i,\ j;\ m,\ n)$ 型拟可换的。$\forall \alpha\in I$,设 x_α，y_α 是X_α中的任意两个元素．命

$$f(\beta)=\begin{cases}x_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}$$

$$g(\beta)=\begin{cases}y_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}$$

则f，$g\in X$。由于$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是 $(i,\ j;\ m,\ n)$ 型拟可换的，故

$$Q_{i,j}(f,\ g)=Q_{m,n}(g,\ f).$$

因此，

$$Q_{i,j}(f, g)(\alpha) = Q_{m,n}(g, f)(\alpha).$$

从而，

$$Q_{i,j}(x_\alpha, y_\alpha) = Q_{i,j}(f(\alpha), g(\alpha)) = Q_{i,j}(f, g)(\alpha)$$
$$= Q_{m,n}(g, f)(\alpha) = Q_{m,n}(g(\alpha), f(\alpha))$$
$$= Q_{m,n}(y_\alpha, x_\alpha).$$

所以，$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$是（$i$, j; m, n）型拟可换的。

Q·E·D·

由此可知成立下列：

推论〔注143〕 同型拟可换性是可积性和逆可积性。

Q·E·D·

现在，我们把例2中的（1，0；0，0）型的拟可换BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$记为X^1。命

$$X^{n+1} = X^n \times X^1, \qquad n \in \omega.$$

那么$\{X^n : n \in \omega\}$是无限多个（1，0；0，0）型拟可换的BCI-代数，而且彼此是不同的。这样，我们就得到下列：

定理8〔注144〕 存在无限多个（1，0；0，0）型的拟可换的BCI-代数。 Q·E·D·

进一步的结果请参看定理Ⅴ·1·4。

类似于定理7的证明，我们可有下列：

定理9〔注145〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一族（i, j; m, n）型拟可换BCI-代数$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle : \alpha \in I\}$的积代数，则X是纯高型的iff至少存在一个$\alpha \in I$，$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$是纯高型的。

Q·E·D·

我们从例4中的BCI-代数出发，利用定理8的证明方法（以后我们简称为"归纳地积代数法"），可得下列：

定理10[注146] 存在无限多个纯高型的拟可换的BCI-代数。

Q·E·D·

6. 拟可换BCI-代数簇

类似于定理Ⅱ·7·4，我们有下列结果：（它是拟可换BCI-代数的一个特征性质）

定理11[注147] 一个（2，0）型的代数⟨X；$*$，0⟩是（i，j；m，n）型的拟可换的BCI-代数的充要条件是它满足以下四个等式：

1）$[(x*y)*(x*z)]*(z*y)=0$， （9）

2）$[x*(x*y)]*y=0$， （10）

3）$x*0=x$， （11）

4）$Q_{i,j}(x, y)=Q_{m,n}(y, x)$。 （2）

证 “⇒”．显然成立。

“⇐”．我们只用证 I_3，I_4，I_5被满足即可。

1° 证满足 I_3。在（9）中以0代y和z，则有

$$0=[(x*0)*(x*0)]*(0*0)=(x*x)*0$$
$$=x*x。$$

上面几个等式中用到了（11）．

2° 证满足 I_4。设 $x*y=0$，$y*x=0$，于是由（2）即有

$$x=Q_{i,j}(x, y)=Q_{m,n}(y, x)=y。$$

3° 证满足 I_5。设 $x*0=0$。由（11），$x=x*0=0$。

Q·E·D·

我们也有拟可换BCI-代数的以下特征：

定理12[注148] 一个（2，0）型的代数⟨X；$*$，0⟩是（i，j；m，n）型的拟可换的BCI-代数的充要条件是它满足

（9），（11），（2）及

$$(x*y)*z=(x*z)*y. \tag{12}$$

证 “⇒”．显然成立。

“⇐”我们只要用证（10）成立（即Ⅰ-2）即可。事实上，由（12）及Ⅰ-3（由（9），（11）导出）

$$(x*(x*y))*y=(x*y)*(x*y)=0.$$

Q·E·D·

在定义Ⅱ·7·4及定义Ⅱ·7·5中我们介绍过代数簇和亚簇的概念。我们有下列结果：

定理13[注149] 一切BCI-代数的类是一个亚簇，称为BCI-代数亚簇。 Q·E·D·

由定理11或定理12可知，成立下列：

定理14[注150] 一切（(*i*，*j*；*m*，*n*)型的）拟可换的BCI-代数的类是一个簇，称为（(*i*，*j*；*m*，*n*)型的）拟可换BCI-代数簇。 Q·E·D·

7．有限BCI-代数

类似于有限BCK-代数，我们可以引入有限BCI-代数的概念。

定义5[注151] 一个有限的BCI-代数是元素个数有限的BCI-代数，即BCI-代数⟨X；*，0⟩使得$1\leqslant|X|<\aleph_0$。

在BCK-代数理论中有这样的结果，由定理Ⅱ·7·7知，一切有限BCK-代数是拟可换的。自然应当考虑在BCI-代数理论中是否成立类似的结果的问题。但是，至今这个问题并没有解决。为了引起注意，作者在这里提出下列：

问题[注152] 有限的BCI-代数一定是拟可换的吗？

8．拟可换BCI-代数的其他性质

我们易知成立下列：

定理15〔注153〕 设⟨X；$*$，0⟩是一个（i，j；m，n）型的拟可换BCI-代数，则⟨B(X)；$*$，0⟩是一个（i，j；m，n）型的拟可换BCK-代数。 Q·E·D·

这样，从定理15的意义上看，任何的拟可换 BCI- 代数都是由一个拟可换的BCK-代数扩张生成的。这和定理 2 是一致的。

定理 6·3 指出了，B(X)是X的一个子代数。从这个角度来看，下列结果是定理15的推广：

定理16〔注154〕 设⟨X；$*$，0⟩是一个（i，j；m，n）型的拟可换BCI-代数，A是X的任意子代数，则⟨A；$*$，0⟩是（i，j；m，n）型拟可换的BCI-代数。

换言之，“具有（i，j；m，n）型拟可换性”的性质是一个遗传性。

证 在⟨A；$*$，0⟩中显然满足$Q_{i,j}(x, y)=Q_{m,n}(y, x)$。

Q·E·D·

定理17〔注155〕 设f是（i，j；m，n）型拟可换 BCI- 代数⟨X；$*$，0⟩到BCI-代数⟨Y；$\curlywedge$，θ⟩上的一个同态映射，则⟨Y；$\curlywedge$，θ⟩也是（i，j；m，n）型拟可换的。

证 设y_1，y_2是⟨Y；$\curlywedge$，θ⟩中的任二元素。由于f是到上的，故$\exists x_1$，$x_2 \in X$，使

$$f(x_1)=y_1,\quad f(x_2)=y_2.$$

因⟨X；$*$，0⟩是（i，j；m，n）型拟可换的，故

$$Q_{i,j}(x_1, x_2)=Q_{m,n}(x_2, x_1).$$

从而

$$f(Q_{i,j}(x_1, x_2))=f(Q_{m,n}(x_2, x_1)),$$

故

$$Q_{i,j}(f(x_1),\ f(x_2)) = Q_{m,n}(f(x_2),\ f(x_1)),$$

即有

$$Q_{i,j}(y_1, y_2) = Q_{m,n}(y_2,\ y_1).$$

因此，$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$也是（$i$, j; m, n）型拟可换的。

Q·E·D·

推论[注156] 若BCI-代数$\langle X;\ *, 0\rangle \simeq$BCI-代数$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$，则

X是（i, j; m, n）型拟可换的 iff Y亦然。

Q·E·D·

由此可知成立下列：

定理18[注157] 设f是从（i, j; m, n）型拟可换BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到BCI-代数$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$上的一个同态映射。则商代数$\langle X/Ker(f);\ *,\ C_0\rangle$也是（$i$, j; m, n）型拟可换的。

证 由定理17，$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$是（$i$, j; m, n）型拟可换的。由定理Ⅱ·9·10知，

$$\langle X/Ker(f);\ *, C_0\rangle \simeq \langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$$

由定理17的推论知，$\langle X/Ker(f);\ *,\ C_0\rangle$是（$i$, j; m, n）型拟可换的。 Q·E·D·

§2 BCI-代数簇问题

我们在定理1·13中指出了：一切BCI-代数的类是一个亚簇。1980年K·Iséki在〔23〕中就提出了一个进一步的问题：

问题（K·Iséki, 〔23〕.）一切BCI-代数的类是否一个簇？

就广义地说，即从整个BCI-代数类来讲，这个问题还没有

解决。1980年，K·Iséki在〔23〕中给出了下列结果，而部分地解决了上述问题：

定理 1 （K·Iséki，〔23〕。）（2，0）型的代数⟨X；∗，0⟩作成的类$\mathscr{U}$，若$\mathscr{U}$中的每个代数满足

1）$((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$，　　（1）

2）$(x*(x*y))*y=0$，　　（2）

3）$x*x=0$，　　（3）

4）$(x*y)*z=(x*z)*y$，　　（4）

5）$x*0=x$，　　（5）

6）$(x*(x*y))*(x*y)=y*(y*x)$，　　（6）

则类U是BCI-代数的一个簇，为了方便起见，我们称其为Iséki意义的BCI-代数簇。　　Q·E·D·

注意定理1·11或定理1·12，Iséki意义的BCI-代数簇实际上是（1，0；0，0）型的拟可换BCI-代数簇。

那么，Iséki意义的BCI-代数簇是否包含了整个BCI-代数类呢？这是狭义形式的Iséki问题。这个问题已为作者和雷天德独立地解决了。

定理 2 （〔注158〕；雷天德，〔40〕。）一切BCI-代数类不是Iséki代数簇。

证 方法一（作者给出，见〔33〕）。设X＝{0，1，2}，X中的二元运算∗由下表给出：

∗	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

，

则⟨X; ∗, 0⟩是一个BCI-代数，但它不满足（6）（即不是（1，0；0，0）型拟可换的），因为

$$(1*(1*2))*(1*2)=(1*2)*(1*2)$$
$$=0,$$

而

$$2*(2*1)=2*1=1.$$

因此，不是所有的BCI-代数包含在Iséki意义的BCI-代数簇内。 Q·E·D·

方法二（雷天德，〔40〕）．设X＝{0，1，2，3，4}，X中的二元运算－由下表给出：

-	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	1	0	4	3	2
2	2	1	0	4	3
3	3	2	1	0	4
4	4	3	2	1	0,

则⟨X; －, 0⟩是一个BCI-代数，但

$$(1*(1*2))*(1*2)\neq 2*(2*1).$$

Q·E·D·

但是，一部分BCI-代数作成的类可以是Iséki意义的BCI-代数簇的子类，例如，作者曾得到下列：

定理3〔注159〕 一切结合(即满足结合律的，见第五章§1)的BCI-代数作成的类是Iséki意义的BCI-代数簇的一个真子类。

证 由于结合律成立，故

$$(x*(x*y))*(x*y)=x*((x*y)*(x*y))$$

$$=x*0$$
$$=x,$$

而

$$y*(y*x)=(y*y)*x=0*x=x,$$

后一等式成立见第五章§2。故（6）成立。

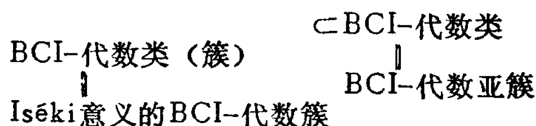
之所以是真子类，见下列例子。　　　　Q·E·D·

例1　存在满足（6）而非结合的BCI-代数。设 $X=\{0,1,2\}$ X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0,

则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$即为所求的BCI-代数。

由本节的一些结果可以给出下表：（下表中的两个包含皆是真包含）结合BCI-代数类⊂（1，0；0，0）型拟可换



本节的一些结果已正式发表在〔51〕。读者可参看该文。

§3　具有条件（S）的BCI-代数

BCK-代数理论中"具有条件（S）"的性质可否推广到BCI-代数中呢？1980年K·Iséki研究了这个问题，并且得到了肯定的回答。

1．具有条件(S)的BCI-代数。

我们先来讨论真BCI-代数的一个事实，即有下列：

定理1　(K·Iséki，〔21〕。) 设〈X。$*$，0〉是一个真BCI-代数，$a\in X$，$b\in X-B(X)$，则a不满足不等式

$$x*a\leqslant b. \tag{1}$$

证　若a满足（1），即$0=a*a\leqslant b$，故$b\in B(X)$，这与"$b\in X-B(X)$"的已知条件矛盾。

Q·E·D·

类似于具有条件（S）的BCK-代数，K·Iséki引入了具有条件（S）的BCI-代数的概念，即有下列：

定义1　设〈X；$*$，0〉是一个BCI-代数.如果对于任意的a，$b\in X$，存在满足（1）的一个最大的元素x，记为$a\ o\ b$,亦即：集合

$$A(a,\ b)=\{x\in X:x*a\leqslant b\} \tag{2}$$

在X中有最大元素

$$a\cdot b=\sup A(a,\ b)\in A(a,\ b), \tag{3}$$

那么称〈X；$*$，0〉为具有条件（S）的。

也可以从映射的观点来看待这个定义，即

$$\left.\begin{array}{l} o:X\times X\longrightarrow X,\\ \quad(a,\ b)\longrightarrow aob. \end{array}\right\} \tag{4}$$

例1　任何具有条件（S）的BCK-代数是具有条件（S）的BCI-代数。

例2　存在不是具有条件（S）的真BCI-代数。设X＝{0，1，2，3}，X中的二元运算$*$由下表给出：

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
2	2	2	0	3
3	3	3	0	0,

则〈X；∗，0〉是一个BCK-代数，且它不具有条件（S），因为

$$A(2, 1) = \{0, 1, 2, 3\},$$

而这四个元素在半序≤下的关系如下图：

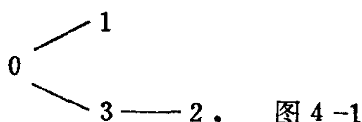


图 4-1

即1与3，1与2均不可比较大小，因此A(2，1)中没有最大元素。

设〈Y；∗，0〉是〈X；∗，0〉的一点扩张，其中Y = X∪{4} = {0，1，2，3，4}，Y中的乘法表如下：

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	4
1	1	0	1	1	4
2	2	2	0	3	4
3	3	3	0	0	4
4	4	4	4	4	0,

则〈Y；∗，0〉是一个真BCI-代数，且它不具有条件（S）。事实上，在Y中仍有

$$A(2, 1) = \{0, 1, 2, 3\},$$

而A（2，1）仍没有最大元素。

例3　例Ⅱ·6·4中给了一个有界的，不具有条件（S）的BCK-代数⟨X；$*$，0⟩，其中X＝{0，a，b，c，1}，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	a	0	c	c	0
b	b	c	0	c	0
c	c	0	0	0	0
1	1	b	a	c	0。

它不具有条件（S）是由于集合

$$A(a, a)=\{0, a, b, c\}$$

在X中没有最大元素。

现将⟨X；$*$，0⟩一点扩张为⟨Y；$*$，0⟩，其中Y＝X∪{d}＝{0，a，b，c，d，1}，而Y的乘法表是如下的表：

$*$	0	a	b	c	1	d
0	0	0	0	0	0	d
a	a	0	c	c	0	d
b	b	c	0	c	0	d
c	c	0	0	0	0	d
1	1	b	a	c	0	d
d	d	d	d	d	d	0。

容易算出，在Y中仍有

$$A(a, a)=\{0, a, b, c\},$$

而A(a，a)在Y中仍没有最大元素。

由例2和例3我们容易考虑到下列：

定理2〔注160〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，$a\overline{\in}X$，$Y=X\cup\{a\}$，$\langle Y; *, 0\rangle$是$\langle X; *, 0\rangle$的一点扩张。

1）如果$u, v\in X$，则

$$A_X(u, v)=A_Y(u, v).$$

2）如果$u, v\in X$，则

$$uo_xv=uo_yv.$$

3）如果$\langle X; *, 0\rangle$不具有条件（S），则$\langle Y; *, 0\rangle$也不具有条件（S）.

证 分别证明于下：

1）设$u, v\in X$。如果$x\in A_x(u, v)$，即$x\in X$，且$x*u\leqslant v$。由一点扩张的定义知，在Y中仍有：$x\in X\subset Y$，且$x*u\leqslant v$。故$x\in A_Y(u, v)$。因此，$A_X(u, v)\subseteq A_Y(u, v)$。

由于

$$(a*u)*v=a*v=a\neq 0,$$

故$a*u\nleq v$，因此$a\overline{\in}A_Y(u, v)$。这样，我们有

$$A_X(u, v)=A_y(u, v),\quad u,v\in X.$$

2）由1）即知，当$u, v\in X$，则

$$uo_xv=uo_yv.$$

3）如果$\langle X; *, 0\rangle$不具有条件（S），则存在$u, v\in X$（u, v可以相等），使得$A(u, v)$在X中没有最大元素。由1），$A(u, v)$在Y中亦没有最大元素。因此，$\langle Y; *, 0\rangle$也不具有条件（S）.　　　　Q·E·D·

当然，是否存在具有条件（S）的真BCI-代数是叫人关心的一个问题。如果找不到这样的例子的话，那么在BCI-代数中讨论"具有条件（S）"的性质就没有什么实际意义了。这个例子

首先被K・Iséki找到。

2．具有条件（S）的真BCI-代数的存在性

K・Iséki在〔21〕中首先给出下列例子：

例4 设X＝{0，1，a}，X中的二元运算$*$如下表给出：

$*$	0	1	a
0	0	0	a
1	1	0	a
a	a	a	0，

则〈X；$*$，0〉是一个真BCI-代数。

显然，B(X)＝{0，1}。而〈B(X)；$*$，0〉是一个具有条件（S）的BCK-代数。〈X；$*$，0〉是一个具有条件（S）的真BCI-代数，映射。（或二元运算。）可由下表给出：

o	0	1	a
0	0	1	a
1	1	1	a
a	a	a	1。

其实，我们还可以给出一个较为简单的二阶的具有条件(S)的真BCI-代数。

例5 设X＝{0，1}，X中的二元运算$*$可由下表给出：

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0，

则〈X；$*$，0〉是一个具有条件（S）的真BCI-代数，其二元运算0可由下表给出：

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0.

注意，在此例中$B(X)=\{0\}$，而$\langle B(X); *, 0\rangle$是一个具有条件（S）的BCK-代数。

由上面的例子，我们可以得到下列结果：

定理 3 （K·Iséki，〔21〕。）存在具有条件（S）的真BCI-代数。

Q·E·D·

3．具有条件(S)的真BCI-代数类

我们继续来讨论一个问题：从例4和例5看，其中给出的具有条件（S）的真BCI-代数都是由一个有界的、具有条件（S）的BCK-代数“一点扩张”而来。那么对于一般情况这一结论是否成立呢？我们的回答是肯定的，即有下列：

定理 4〔注161〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是具有条件（S）的有界BCK-代数，$a\overline{\in}X$，$Y=X\cup\{a\}$，$\langle Y; *, 0\rangle$是$\langle X; *, 0\rangle$的一点扩张．则$\langle Y; *, 0\rangle$也具有条件（S）．

证 由于定理2的1）和2），我们只用作如下计算：

$0\circ a=a\circ 0=a$；

$x\circ a=a\circ x=a$，$x\in X$，$x\neq 0$；

$a\circ a=1$，1为X中的单位元。 Q·E·D·

注 定理4中的“有界”的条件还是必要的．我们有下列：

定理 5〔注162〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，$a\overline{\in}X$，$Y=X\cup\{a\}$，且$\langle Y; *, 0\rangle$是$\langle X; *, 0\rangle$的一点扩张．则$\langle X; *, 0\rangle$是具有条件（S）和有界的充要条件是$\langle Y; *, 0\rangle$

是具有条件（S）的。

证　必要性已由定理4给出。现证充分性。由于定理2的1）和2），只要证$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是有界的。由于$\langle Y;\ *,\ 0$是具有条件（S）的，故$A(a,\ a)$具有最大元。

我们断言：

$$A(a,\ a)=X.$$

事实上，对于任意的$x\in X$有

$$(x*a)*a=a*a=0,$$

故$x*a\leqslant a$，即$x\in A(a,\ a)$。而

$$(a*a)*a=0*a=a,$$

故$a\ \overline{\in}\ A(a,\ a)$。因此，$A(a,\ a)=X$。

由于$A(a,\ a)$具有最大元，而$A(a,\ a)=X$，因此X中有最大元。所以，X是有界的。　　　　Q·E·D·

对于具有条件（S）的BCI-代数类的真类问题，基数问题和真子类问题，我们有下列结果：

定理6〔注163〕　对于任意的基数$\gamma>0$存在一个具有条件（S）的BCI-代数。因此，具有条件（S）的BCI-代数类是一个真类。具有条件（S）的BCI-代数类是BCI-代数类的一个真子类，而具有条件（S）的BCK-代数类是具有条件（S）的BCI-代数类的一个真子类。

证　1）由于例1，故有：具有条件（S）的BCK-代数类是具有条件（S）的BCI-代数类的一个子类。由例4和例5知，具有条件（S）的BCK-代数类是具有条件（S）的BCI-代数类的一个真子类。

2）由定理Ⅱ·6·5知，对于任意的基数$\gamma>0$存在一个基数为γ的具有条件（S）的BCK-代数。因此，对于任意的基数

$\gamma>0$ 存在基数为 γ 的具有条件(S)的BCI-代数。

3）由2）可知，具有条件（S）的BCI-代数类是一个真类。

4）由例2和例3知，具有条件（S）的BCI-代数类是BCI-代数类的一个真子类。 Q·E·D·

自然，一切具有条件（S）的真BCI-代数也作成一个类。对于它的真类问题、基数问题及真子类问题我们有下列结果：

定理7〔注164〕 对于任意的基数 $\gamma>1$ 存在一个基数为 γ 的具有条件（S）的真BCI-代数。因此，一切具有条件（S）的真BCI-代数作成一个真类。一切具有条件（S）的真BCI-代数作成的类是BCI-代数类的一个真子类，也是具有条件(S）的BCI-代数类的一个真子类。

证 1）关于基数的第一个结论可由下面的引理1和引理2知。

2）由1）可知，一切具有条件（S）的真BCI-代数作成一个真类。

3）由于

$$\begin{matrix}\text{具有条件(S)的}\\\text{BCI-代数类}\end{matrix}=\begin{matrix}\text{具有条件(S)的}\\\text{BCK-代数类}\end{matrix}\cup\begin{matrix}\text{具有条件(S)的}\\\text{真BCI-代数类，}\end{matrix}$$

故具有条件（S）的真BCI-代数类是BCI-代数类的一个真子类，也是具有条件（S）的BCI-代数类的一个真子类。

Q·E·D·

下面，我们给出两个引理。

引理1〔注165〕 如果〈X；$*$，0〉是基数为 γ 的有界的具有条件（S）的BCK-代数，且〈Y；$*$，0〉是它的一点扩张，$Y=X$

$\cup\langle a\rangle$，$a\ni X$，则当$|X|<\aleph_0$时，$\langle Y;\ *,\ 0\rangle$是基数为$\gamma+1$的具有条件（S）的真BCI-代数；当$|X|\geqslant\aleph_0$时，$\langle Y;\ *,\ 0\rangle$是基数为γ的具有条件（S）的真BCI-代数。

证 由定理4及基数的运算性质可知。

Q·E·D·

引理2〔注165〕 对于任意的$\gamma>0$存在基数为γ的具有条件（S）的有界BCK-代数。

证 由例Ⅱ·6·1，6，5，8四个例子可知。

Q·E·D·

4．具有条件（S）的BCI-代数的性质

与定理Ⅱ·6·7的证明完全一样地可得下列：

定理8 （K·Iséki，〔21〕.）具有条件(S）的任何BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是关于$\circ$的一个交换的半群，即（X，0）满足下列条件：

1）$\forall x,\ y\in X,\qquad xoy\in X,$

2）$\forall x,\ y,\ z\in X,\qquad (x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),$ （6）

3）$\forall x,\ y\in X,\qquad x\circ y=y\circ x.$ （7）

此外，$\circ$是这个半群中的一个恒等元，即

4）$\forall x\in X,\qquad 0\circ x=x\circ 0=x.$ （8）

Q·E·D·

类似于定理Ⅱ·6·8的证明可有下列：

定理9〔注166〕 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个具有条件(S）的BCI-代数，则对于任意的x，y，成立

$x\leqslant y\Rightarrow x\circ z\leqslant y\circ z$ Q·E·D· （9）

类似于定理Ⅱ·6·9的证明可有下列特征性质：

定理10〔注167〕 一个BCI-代数$\langle X;\ *,0\rangle$是具有条件（S）

的充要条件是X中存在一个二元运算∘满足

$$(x*y)*z=x*(y\circ z). \qquad Q\cdot E\cdot D\cdot \tag{10}$$

类似于对定理Ⅱ·6·11中（16）的证明有下列：

定理11[注158]　设⟨X；$*$，0⟩是具有条件（S）的BCI-代数，则对于任意的x，y，$z\in X$成立

$$x*y\leqslant(x*z)\circ(z*y). \tag{11}$$

我们还有下面一些结果：

定理12　（K·Iséki，〔21〕·）设⟨X；$*$，0⟩是具有条件（S）的BCI-代数，则⟨B(X)；$*$，0⟩是具有条件(S)的BCK-代数。

证　我们只用证B(X)对∘封闭即可。事实上，设a，$b\in$ B(X)，设$c=a\circ b$。由于$a*a=0\leqslant b$，故$a\leqslant a\circ b=c$。从而$0\leqslant a$，$a\leqslant c$，故$0\leqslant c$，即$c\in$ B(X)。　　Q·E·D·

类似于对定理Ⅱ·10·12的证明我们有下列：

定理13[注169]　设⟨X；$*$，0⟩是一族具有条件（S）的BCI-代数⟨X_a；$*_a$，O_a⟩的积代数，则⟨X；$*$，0⟩也具有条件(S)，而且对于X中的任二元素f，g有

$$(f\circ g)(a)=f(a)\circ g(a). \qquad Q\cdot E\cdot D\cdot \tag{12}$$

定理13的证明要用到下列引理，它本身是积代数的一个性质，其证明完全类似于引理Ⅱ·10·4：

引理3[注170]　设⟨X；$*$，0⟩是一族BCI-代数⟨X_a；$*_a$，O_a⟩($a\in I$)的积代数。对于X中的任二元素f和g成立

$$f\leqslant g \quad \text{iff} \quad \forall a\in I,\ f(a)\leqslant g(a)\cdot \tag{13}$$

Q·E·D·

由定理10可知，具有条件（S）的性质是一个可积性。那么它是否是一个逆可积性呢？回答是肯定的。类似于定理Ⅱ·10·13

的证明我们可有下列：

定理14[注171]　具有条件（S）的性质是一个逆可积性。

Q·E·D·

§4　BCI-代数的根性

在环论中根和根性的研究是很重要的课题，有着很丰富的内容，近年来，一些作者在BCI-代数中引进了根性的研究（如〔42〕），增添了BCI-代数理论的内容。在本节中，作者对BCI-代数的根性作些简单的介绍。显然，有许多概念和结果也是对BCK-代数适合的，作者不在这里一一赘述了。

1．R-BCI-代数。

设R是BCI—代数的一个性质。

定义1[注172]　如果BCI-代数〈X；＊，0〉具有性质R，则称为一个R-BCI-代数。

我们假定一个R-BCI-代数〈X；＊，0〉的一个任意的同构象〈X′；＊′，0′〉也是一个R-BCI-代数，即在BCI-代数中R是一个同构不变性。

定义2[注173]　一个BCI-代数〈X；＊，0〉的一个理想I被称为是一个R-理想，如果

1）I是X的一个子代数，（对BCK—代数而言，这一条是不用写出的，见定理Ⅱ·8·3·）

2）〈I；＊,0〉是一个R-BCI-代数。

为了方便起见，我们引进下列：

定义3[注174]　在BCI-代数〈X；＊，0〉中一个理想如果还是子代数，则被称为X的理想子代数。X的一切理想子代数作

成的集合被记为IDS(X)。

定理 1〔注175〕 设〈X；$*$，0〉是一个BCI-代数，则

$$\varnothing \neq IDS(X) \subseteq ID(X) \subseteq PX。 \qquad (1)$$

证 后二包含式是显然的。由于 B(X)∈IDS(X)，故IDS(X) ≠∅。

Q·E·D·

（参看定理Ⅱ·8·1和定理Ⅱ·6·3。）

下面，作为R-理想的例子，我们给出两个结果：

定理 2〔注176〕 设〈X；$*$，0〉是（i，j；m，n）型拟可换的BCI-代数。则∀A∈IDS(X)，A是一个（i,j；m，n）型拟可换的理想。特别地，B(X)是一个（i，j；m，n）型拟可换的理想。

证 由定理1·16及定义2知。 Q·E·D·

定理 3〔注177〕 设〈X；$*$，0〉是具有条件（S）的BCI-代数，则B(X)是X的一个具有条件（S）的理想。

证 由定理3·12知。 Q·E·D·

2．BCI-代数的R-根。

定义 4〔注178〕 设〈X；$*$，0〉是一个BCI—代数。把X的一切R-理想作成的集合记为RI(X)。

定义 5〔注179〕 设〈X；$*$，0〉是一个BCI-代数。如果∃R(X)（以后就这样记）∈RI(X)，使得∀I∈RI(X)都有I⊆R(X)，即RI(X)中存在一个按"⊆"关系的最大元素R(X)，那么称R(X)为〈X；$*$，0〉的R—根，或简称X的R-根。

例 1〔注180〕 设〈X；$*$，0〉是任意的一个BCI-代数。性质R取为：

$$R： \quad 0 \leqslant x。 \qquad (2)$$

则RI(X)中有最大元，即有R(X)＝B(X)。我们把性质(2)称为BCK-性或非负性，那么BCI-代数⟨X；$*$，0⟩的BCK-根存在，且是B(X)。

定义6〔注181〕 一个BCI-代数⟨X；$*$，0⟩被称为是R-半单的，如果平凡理想{0}是X中仅有R-理想。

例2 结合的BCI-代数是BCK-半单的。（见第五章§2。）

例3 如果一个BCI-代数⟨X；$*$，0⟩的B(X)＝{0}，R为可换性，即

$$R:\ Q_{0,0}(x,y)=Q_{0,0}(y,x,) \qquad (3)$$

则X是R—半单的。

显然，有下列结果：

定理4〔注182〕 设⟨X；$*$，0⟩是一个BCI-代数，R是一个性质。那么X是R-半单的当且仅当{0}是X的R-根R[X]。

证 "⇒"。因为X是R-半单的，故{{0}}＝RI(X)，因此，R[X]＝{0}。

"⇐"。因为{0}＝R[X]，故RI(X)＝{{0}}，由定义6，X是R-半单的。　　Q·E·D·

3．根性。

定义7〔注183〕 一个性质R被称为一个根性，如果R满足下列三个公理：

①一个R-BCI-代数⟨X；$*$，0⟩的每个同态象⟨X′；$*$′，0′⟩仍是一个R-BCI-代数。

②每个BCI-代数⟨X；$*$，0⟩有一个R—根R[X]。

③商代数⟨X/R[X]；$*$，C_0⟩是R-半单的，即R[X/R[X]]＝{C_0}。

定义 8〔注184〕 如果对于一个根性R和一个 BCI-代数 ⟨X; ∗, 0⟩成立

$$R[X]=X, \tag{4}$$

那么我们称⟨X; ∗, 0⟩为一个R—根BCI-代数.

下面我们介绍BCI-代数中的几个根性.

定理 5〔注185〕 性质R是

$$R:\ (x*y)*z=(x*z)*y, \tag{5}$$

则R是BCI-代数的一个根性，且任意的BCI-代数⟨X; ∗; 0⟩都是一个R—根BCI—代数。

证 1）R实际上是任一BCI-代数所具有的性质，故公理①显然成立.

2）设⟨X; ∗, 0⟩是任一BCI-代数，则 R[X]=X，从而公理②和本定理的第二个结论为真.

3）设⟨X; ∗, 0⟩是任一BCI-代数，则商代数X／R[X]={C_0}，从而⟨X／R[X]; ∗, C_0⟩显然是R-半单的.

Q·E·D·

一般地，完全一样地证明，我们可有下列:

定理 6〔注186〕 如果性质R是任何BCI-代数所具有的性质（如我们在第三章§2中所得到的任何一个性质），则R是BCI-代数的一个根性，且任意的BCI—代数⟨X; ∗, 0⟩都是一个R-根BCI-代数.

Q·E·D·

除此之外，我们在这里再介绍一个根性.

定理7 （雷天德，〔42〕·）BCK-性是一个根性.

证 我们分别证明如下:

1）验证公理①成立. 设⟨X; ∗, 0⟩是具有BCK-性的一个BCI-代数，则它是一个BCK-代数，而其同态象自然是一

个 BCK-代数。事实上，设f是 BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$到 BCI-代数$\langle X'; *'; 0'\rangle$上的一个同态映射，对任意的$x'\in X'$，任取$x\in X$，使$f(x)=x'$。由于$\langle X; *, 0\rangle$是 BCK-代数，故

$$0*x=0,$$

从而

$$0'*'x'=f(0)*'f(x)=f(0*x)=f(0)=0',$$

故

$$0'\leqslant x',$$

因此$\langle X'; *', 0''\rangle$是一个BCK-代数。

2）验证公理②成立。这由例1而知。

3）验证公理③成立。这由下列引理可知。 Q·E·D·

引理 1 设$\langle X; *, 0\rangle$是任一BCI-代数，则商代数$\langle X/B(X); *, C_0\rangle$的BCK-部分$B(X/B(X))=\{C_0\}$。

在证这个引理之前，我们先给出下列：

引理 2 设$\langle X; *, 0\rangle$是任一BCI-代数，则在商代数$\langle X/B(X); *, C_0\rangle$中有

$$C_0=B(X). \tag{6}$$

证 由定理Ⅱ·9·4的1）知$C_0\subseteq B(X)$。

设x是$B(X)$中的任一元素。则

$$0*x=0\in B(X),\quad x*0=x\in B(X),$$

故$x\sim 0$，即$x\in C_0$。从而$B(X)\subseteq C_0$。

因此，$C_0=B(X)$。 Q·E·D·

证明引理 1 显然，$\{C_0\}\subseteq B(X/B(X))$。设$C_x\in B(X/B(X))$。则

$$C_{0*x}=C_0*C_x=C_0,$$

故 $0*x\in C_0=B(X)$。于是

$$0*(0*x)=0.$$

于是，

$$0*x=(0*(0*x))*x=0,$$

后一等式是由于公理 I－2。因此，$x\in B(X)=C_0$，从而 $C_x=C_0$。所以，

$$B(X/B(X))=\{C_0\}. \qquad Q\cdot E\cdot D\cdot$$

易知，成立下列：

定理 8〔注187〕 设〈X；*，0〉是一个 BCI-代数，则它是一个BCK-根BCI-代数的充要条件是它是一个BCK-代数。

证 "⇒"。设〈X；*，0〉是一个BCK-根BCI-代数，即设R为BCK-性，则

$$R[X]=X.$$

从而X满足非负性（2），此〈X；*，0〉是一个 BCK-代数。

"⇐"。设〈X；*，0〉是一个BCK-代数，则 B(X)＝X，从而由例 1 知，R〔X〕＝X，其中R是 BCK-性，所以，〈X；*，0〉是一个BCK-根BCI-代数。 Q・E・D・

从这些结果我们可以清楚地看出，根和根性的研究不仅丰富了BCI-代数理论的研究，而且加深和促进了有关商代数的研究。

第五章　结合BCI-代数

在第四章中我们简单地介绍了BCI-代数理论中的几个专题。在本章中我们将介绍BCI-代数理论中一个重要的专题——结合BCI-代数及其推广的问题，这个专题是由作者和K·Iséki一起提出的（见〔27〕），许多中国作者投入了这一方面的工作，取得了很多成果。

§1　结合BCI-代数的概念

1980年，作者与K·Iséki一起讨论了在BCI-代数理论中引进结合性的问题。我们讨论的一部分成果发表在日本的Math·sem。Notes上，即〔27〕。1982年，作者与K·Iséki在中国的《科学通报》上发表了〔28〕。我们在结合BCI-代数方面的这一部分工作已引起了国内、外有关方面的人士的注意，美国的Math。Review杂志作了评论，西德的Zent·Math，杂志请作者写作者摘要并发表了它（见〔30〕），国内有一些人对此项工作有兴趣，并以此为基础作出了很多工作，还有一些学者对这项工作很支持，给以较高的评价。

我们在本节中先介绍一下结合BCI-代数的概念。

1．结合BCI-代数的概念：

结合BCI-代数，即为满足结合律的BCI—代数，具体定义为：

定义 1〔注188〕 一个BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$如果满足下列条件

$$(x*y)*z=x*(y*z), \qquad (1)$$

则称为结合的BCI-代数，或称它为具有结合性的。

2．结合BCI-代数的存在

具有结合性的BCI-代数是否存在呢？我们的回答是肯定的，即有下列：

定理 1〔注189〕 存在结合的BCI-代数。

证 可见下列例1—例3。

Q·E·D·

例 1 设$X=\{0\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0
0	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是平凡的BCK-代数，也具有结合性。

例 2 设$X=\{0, a\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	a
0	0	a
a	a	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI-代数，也具有结合性。

例 3 设$X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI-代数，且具有结合性。

应当说，结合BCI-代数是很多的，我们还可以给出一大类结合的BCI-代数。

例 4 设$(X, *)$是一个对合群，且以0为恒等元，由定理Ⅳ·1·3知，$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数。由于群$(X, *)$中结合律是成立的，故$\langle X; *, 0\rangle$具有结合性。

在下一节中我们将要看到，上述命题的逆也是成立的。

我们还要指出一点，存在非结合的BCI-代数。

例 5 设$X=\{0, 1\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

*	0	1
0	0	0
1	1	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCK-代数，它不具有结合性，事实上，

$$(1*1)*1=0*1=0,$$

$$1*(1*1)=1*0=1.$$

例 6 设$X=\{0, 1, a\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	a
0	0	0	a
1	1	0	a
a	a	a	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI-代数，但不具有结合性。

例7 设$X=\{0, 1, 2, 3\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真 BCI-代数，而不具有结合性，事实上，

$$(1*2)*3=3*3=0,$$

$$1*(2*3)=1*3=2.$$

3．结合BCI-代数类。

我们再来看一个结合BCI-代数的例子。

例8 设X是一个非空集合，例Ⅱ·1·4指出，$\langle P(X); \triangle, \varnothing\rangle$是一个真BCI-代数。由集合论可知，对于任意的A，B，$C\subseteq P(X)$，则

$$(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C),$$

故$\langle P(X); \triangle, \varnothing\rangle$是一个结合的BCI-代数。

现在，我们可以得到下列结果：

定理 2〔注190〕 一切结合的BCI-代数作成BCI-代数类的一个真子类，且在GCH下，结合BCI—代数类是一个真类。

证 对于任意的基数 α（若 α 是无限基数，则视 α 为初始序数），命

$$X_\alpha=\{序数\ \beta:\beta<\alpha\},$$

则 $\langle P(X_\alpha);\ \triangle,\ \varnothing\rangle$ 是一个结合的BCI—代数。这样，易知，一切结合BCI—代数作成一个真类 $\mathscr{M}$。

由于 $\mathscr{M}\subseteq$ 一切BCI—代数作成的类，且由于非结合的BCI—代数的存在，故 $\mathscr{M}$ 是BCI—代数类的一个真子类。

Q·E·D·

我们容易证明下列：

定理 3〔注191〕 结合BCI—代数是（1，0；0，0）型拟可换的，也是（0，1；0，0）型拟可换的。

证 设 $\langle X;\ *,\ 0\rangle$ 是任一结合的BCI—代数，x，y 是它的任二元素。因为

$$\begin{aligned}(x*(x*y))*(x*y)&=x*((x*y)*(x*y))\\&=x*0=x,\end{aligned}$$

$$y*(y*x)=(y*y)*x=0*x=x,$$

后一等式用到了我们将在§2中给出的结合BCI-代数的一个性质：$0*x=x$。这样，我们已经证得了

$$Q_{1,0}(x,y)=Q_{0,0}(y,\ x)。\qquad (2)$$

因此，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$ 是（1，0；0，0）型拟可换的。

又因为

$$\begin{aligned}(x*(x*y))*(y*x)&=((x*x)*(y*y))*x\\&=0*x=x,\end{aligned}$$

故

$$Q_{0,1}(x,y)=Q_{0,0}(y,x) \qquad (3)$$

因此，〈X； ∗， 0〉是（0， 1； 0， 0）型拟可换的。

Q・E・D・

存在（1， 0； 0， 0）型拟可换的、非结合的BCI-代数，如在例6中给出的BCI-代数〈X； ∗， 0〉。我们可以有下列：

定理4[注192] GCH。一切（1， 0； 0， 0）型拟可换的BCI-代数作为一个真类（称为（1， 0； 0， 0）型拟可换BCI-代数类的一个真子类）一切结合BCI-代数作成的类（称为结合BCI-代数类）是（1， 0； 0， 0）型拟可换BCI-代数类的一个真子类。

证。由定理3及定理2知，结合BCI-代数类被包含在（1， 0； 0， 0）型拟可换BCI-代数类之中，由例6，这个包含是真包含。因此，结合BCI-代数类是（1， 0； 0， 0）型拟可换BCI-代数类的一个真子类。又因为纯高型拟可换BCI-代数的存在（见例Ⅳ．1．4），故（1， 0； 0， 0）型拟可换BCI-代数类又是BCI-代数类的真子类。

Q・E・D・

注 这个定理的第一个结论加强了定理Ⅳ・1・8。由这个定理可知下列关系表：

$$\varnothing \neq \begin{matrix}\text{结合BCI}\\\text{-代数类}\end{matrix} \subset \begin{matrix}(1,\ 0;\ 0,\ 0)\\\text{拟可换代数类}\end{matrix}$$

$$\subset \begin{matrix}\text{拟可换}\\\text{代数类}\end{matrix} \subseteq \text{BCI-代数类}.$$

最后一个包含式是否真包含呢？这是尚不知道的一个问题，即下列：

问题[注193]　存在非拟可换的BCK-和BCI-代数吗？

4．同态和结合BCI-范畴。

关于同态我们有下列结果：

定理5[注194]　设f是结合BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$到BCI-代数$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$上的一个同态对应，则$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$是结合的。

证　设y_1，y_2，y_3是Y中的任意三个元素，由于f是满的，故　$\exists x_i \in X (i=1, 2, 3)$ 使

$$f(x_i)=y_i,\ i=1, 2, 3.$$

由于X是结合的，故

$$\begin{aligned}(y_1 * y_2) \curlywedge y_3 &= (f(x_1) \curlywedge f(x_2)) \curlywedge f(x_3)\\ &= f(x_1 * x_2) \curlywedge f(x_3)\\ &= f((x_1 * x_2) * x_3)\\ &= f(x_1 * (x_2 * x_3))\\ &= f(x_1) \curlywedge f(x_2 * x_3)\\ &= f(x_1) \curlywedge (f(x_2) \curlywedge f(x_3))\\ &= y_1 \curlywedge (y_2 \curlywedge y_3).\end{aligned}$$

因此，$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$是结合的。

Q·E·D·

推论[注195]　对于BCI-代数来说，结合性是同态不变性和同构不变性。

Q·E·D·

注　结合性并不是同态下的逆不变性，即结合BCI-代数的满同态原象不必是结合的。西北大学数学系八〇级学生李金龙提供了下列反例：

例9　设$X=\{0, 1, 2\}$，X中的二元运算$*$如下表：

$*$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

，

则⟨X；$*$，0⟩是一个BCI-代数，但不是结合的。

设Y = $\{\theta, a\}$，Y中的二元运算⅄如下表所示：

⅄	θ	a
θ	θ	a
a	a	θ

，

则⟨Y；⅄，θ⟩是一个结合的BCI-代数。

命

$$f：X \longrightarrow Y,$$

$$0 \longmapsto \theta, 1 \longmapsto \theta, \quad 2 \longmapsto \alpha,$$

则 f 是由⟨X；$*$，0⟩到⟨Y；⅄，θ⟩上的一个同态。

定理 6〔注196〕 一切结合BCI-代数与结合 BCI-代数之间的同态作成一个范畴，称为结合BCI-代数范畴，它是BCI- 代数范畴的一个子范畴。 Q·E·D·

§2 结合BCI-代数的性质（I）

这一节我们来讨论一下结合 BCI- 代数的一些性质，主要是〔28〕中的一些结果。

1．BCK-部分。

对于结合的BCI-代数来讲，其BCK-部分特别简单，我们

有下列：

定理 1〔注197〕 设⟨X；$*$，0⟩是结合的BCI-代数，则

$$B(X)=\{0\}. \quad (1)$$

证 显然，$\{0\}\subseteq B(X)$。设$x\in B(X)$，则

$$0*x=0. \quad (2)$$

因此， $$(x*x)*x=0.$$

由于结合律成立，故，

$$x*(x*x)=0,$$

即有

$$x*0=0. \quad (3)$$

由于（2）和（3）皆成立，据公理I－4知，$x=0$，从而$B(X)=\{0\}$。 Q·E·D·

推论 1〔注198〕 设⟨X；$*$，0⟩是一个BCK-代数.则⟨X；$*$，0⟩是结合的当且仅当$X=\{0\}$。

证 “⇐”。平凡的BCK-代数显然是结合的。

“⇒”。设⟨X；$*$，0⟩是结合的BCK-代数。从而它是结合的BCI-代数。故$B(X)=0$，另一方面，由于它是BCK-代数，故$B(X)=X$。从而$X=\{0\}$。 Q。E。D。

推理 2 一个非平凡的结合BCI-代数必是真BCI-代数。

Q·E·D·

这样，我们可以清楚地看出，在BCK-代数理论中没有必要研究结合性，因为具有结合性的BCK-代数只有平凡的BCK-代数一个，也可以说，结合性是BCI-代数理论中研究的一个对象。这一点与第四章中研究的拟可换性及具有条件（S）的性质是不同的，这是研究结合性的作用之一。应当说，在结合性出现以前，BCI-代数理论只是作着推广的工作：看BCK-代

数理论中哪些性质可推广到BCI-代数理论中，比如拟可换性及具有条件（S）的性质等。而结合性是第一个属于BCI-代数理论所固有的性质。而这正反映了BCI-代数本身的特点和生命力。

2．结合BCI—代数的一条重要性质.

我们现在来给出结合BCI-代数的一条重要性质，它也是我们在前面几次提到过的，即下列：

定理2〔注199〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个结合的BCI-代数，则对于任意的$x\in X$成立：

$$0*x=x. \tag{4}$$

证 因$\forall x\in X$，有

$$x*0=x.$$

从而，对于任意的$z\in X$有

$$x*z=(x*0)*z=x*(0*z), \tag{5}$$

后一等式用到了结合性。在（5）中命$z=x$，则有

$$x*(0*x)=x*x=0. \tag{6}$$

另一方面，我们有

$$(0*x)*x=0*(x*x)=0*0=0. \tag{7}$$

由于（6）和（7）同时成立，故由公理Ⅰ-4知有$0*x=x$.　　　　Q·E·D·

从定理2我们可以知道，对于一个有限结合的BCI-代数来说，其乘法表的第一行与上面的元素一样：$0*x=x$。又因为$x*0=x$，故第一列与第一行元素是对称的。

这样，如果$\langle X; *, 0\rangle$是一个有限的结合的BCI-代数，根据上述性质，再根据$x*x=0$，我们可以把乘法表记述于下：

*	0	⋯	a	⋯	b	⋯
0	0	⋯	a	⋯	b	⋯
⋮	⋮	⋱				
a	a		0			
⋮	⋮			⋱		
b	b				0	
⋮	⋮					⋱

下面我们还将述出这个乘法表中其它位置的元素的一些特点。

3．与群的关系。

结合BCI–代数与群有着密切的关系，我们先有下列：

定理3〔注200〕　设〈X；*，0〉是一个结合的BCI–代数，则（X，*）是具有恒等元0的一个半群。

证　显然，X对*是封闭的，且满足结合律，故（X，*）是一个半群。另外，对于任意的$x\in X$，由定理Ⅱ·2·6知

$$x * 0 = x; \qquad (8)$$

由定理2知

$$0 * x = x.$$

因此，0是半群（X，*）的一个恒等元。　　Q·E·D·

进一步，我们可有下列结果：

定理4〔注201〕　设〈X；*，0〉是一个结合的BCI–代数，则（X，*）是以0为恒等元的每个元素皆为对合的群（即对合群）。

证　因〈X；*，0〉是一个BCI–代数，故由Ⅰ–3知，对于任意的$x\in X$有

$$x * x = 0 . \qquad (9)$$

此式表明，对于X中的任意一个元素 x，皆以 x 自身为逆元，再据定理 3 而知，（X；＊）是一个群；另一方面，由（9）亦知，X中每一元素皆为对合。 Q·E·D·

由此，我们可知成立下列：

定理 5〔注202〕 〈X；＊，0〉是一个结合的 BCI- 代数⟺（X，＊）是以 0 为恒等元的对合群。

证 “⇒”．由定理 4 知．

“⇐”，由定理Ⅳ·1·3知，如果（X，＊）是以 0 为恒等元的对合群，则〈X；＊，0〉是一个BCI–代数。由于群满足结合律，故〈X；＊，0〉是一个结合的BCI–代数。

Q·E·D·

这样，我们就把结合的BCI–代数与对合群等同了起来.我们研究结合性的第二个作用在于：把 BCI- 代数与群论联系了起来。这不仅开拓了研究 BCI- 代数的一个方向，而且使我们可以用群论的观点来进一步研究结合的 BCI–代数和其它的 BCI–代数。

4．结合BCi–代数的几个特征性质

在本节的最后，我们给出结合 BCI- 代数的几个特征性质，定理 5 实际上正是结合BCI–代数的一个特征，它是以对合群来表征的。自然地，我们可以表述于下：

定理 6〔注203〕 设〈X；＊，0〉是一个（2，0）型的代数，则〈X；＊，0〉是一个结合BCI—代数的充要条件是它满足下列条件：

1） $(x * y) * z = x * (y * z)$， （10）

2） $0 * x = x$， （4）

3） $x * 0 = x$, （8）

4） $x * x = 0$. （9）

证 “⇒”，显然。“⇐”．因〈X；∗，0〉是一个(2,0)型的代数（从而X对运算∗封闭），且满足条件1）—4），及$0 \in X$，因此（X，∗）是一个对合群，且以0为恒等元。由定理5知，〈X；∗，0〉是一个结合的BCI—代数。

Q·E·D·

这里需要对这方面的有关问题作两点说明：

注1 定理5一方面以对合群表征了结合的BCI-代数，另一方面又以结合BCI-代数表征了对合群。这样，我们又可以得到对合群的许多性质，如BCI-代数所具有的性质(见第三章§2)和结合BCI-代数所具有的性质。

注2 定理6用四个等式表征了结合BCI-代数。大家知道，定理Ⅳ·2·3．指出了，结合BCI-代数类是Iséki意义的BCI-代数簇的一个真子类。迄今，“一切BCI-代数的类是否一个簇”的问题尚未解决。这里，定理6实际上给了这个K·Iséki提出的一般的簇论问题以部分解决，即我们有下列：

定理7[注204] 一切结合BCI—代数的类是一个簇。

Q·E·D·

下面我们再给出结合BCI-代数的几个特征。定理2中我们曾得到了结合BCI-代数的一个重要性质：$0 * x = x$。现在，我们要指出，这个性质是结合性的一个特征，即有下列：

定理8[注205] 设〈X；∗，0〉是一个BCI-代数，则下列条件等价：

1） X是结合的，即（10）成立。

2） $0 * x = x$, $\forall x \in X$, （4）

3）$x*y=y*x$，$\forall x$，$y\in X$，（11）

证 1）⇒2），由定理2给出。

2）⇒3）。由公理Ⅰ—1知

$$((0*x)*(0*y))*(y*x)=0.$$

由（4）即知

$$(x*y)*(y*x)=0. \tag{12}$$

同理（将x与y互换）又有

$$(y*x)*(x*y)=0. \tag{13}$$

由于（12）和（13）同时成立，据公理Ⅰ-4而有（11）成立。

3）⇒1）。我们据3）和BCI–代数的性质可有：

$$x*(y*z)=(y*z)*x=(y*x)*z=(x*y)*z.$$

这就得到了结合律（10）。 Q·E·D·

注 我们研究结合性的第三个作用在于：我们得到了结合性的两个特征：公式（4）和（11）。这样，我们没有必要在BCI–代数理论再专门研究具有性质（4）和（11）的BCI–代数。另一方面，和结合性一样，性质（4）和(11)是BCI–代数所固有的性质。即就是，我们有下列：

定理9〔注206〕 BCK–代数⟨X；*，0⟩具有性质（4）或（11）的充要条件是它是平凡的，即X＝{0}。

证 由定理8及定理1的推论1知。 Q·E·D·

注 我们把公式（11）

$$x*y=y*x$$

又称为对运算*交换的，或简称运算交换的〔注207〕。由定理9指出，运算交换性对BCK–代数来讲没有什么意义，只有平凡的BCK–代数才具有(这一点我们在定理Ⅰ·2·2中已指出)；而对

于BCI-代数来讲，运算交换性是一个固有的性质，但由定理8知，它与结合性等价。故一般说来，我们在BCI-代数中也不必专门研究它，还要说明的是，结合BCI-代数具有运算交换性是十分自然的，因为从群论的角度来看，对合群是一个交换群（见定理Ⅰ·3·5）。

我们研究结合BCI-代数的第四个作用在于：由此得到了很多结果，解决或部分地解决一些问题，例如定理7以及下一节的一些结果。而我们研究结合BCI-代数的第五个作用在于：产生了一批更广泛的结果。而丰富和发展了BCI-代数理论，例如广义结合性等的产生。这些内容我们将在以后几节中分别介绍。

§3 结合BCI-代数的性质（Ⅱ）

我们在§2中介绍了结合BCI-代数的性质，并且顺便地提出了研究结合性的五个主要作用。在本节中，我们继续来讨论结合BCI-代数的一些性质。

1．等价定义．

我们在§2中给出了结合BCI-代数的几个特征或等价条件，本节中我们再给出结合BCI-代数的等价定义。

定理1[注208]　（2，0）型的代数⟨X；$*$，0⟩是结合的BCI-代数当且仅当⟨X；$*$，0⟩满足下列条件：

1）$x*x=0$，　（1）

2）$x*y=y*x=0\Rightarrow x=y$，　（2）

3）$(x*y)*z=(x*z)*y$．　（3）

4）$(x*y)*z=x*(y*z)$．　（4）

证　"⇒"．这是显然的。

“⇐”，据定理Ⅱ·2·8，我们只要证Ⅰ—1满足即可。为此，我们计算如下：

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)$$
$$=((x*y)*x)*((z*z)*y)$$
$$=((x*x)*y)*((z*z)*y)$$
$$=(0*y)*(0*y)$$
$$=0。$$

Q. E. D.

由此我们立即得到下列关于对合群的一个特征：

定理 2〔注209〕 设X是一个非空集合，$0\in X$，且X对二元运算$*$封闭，则（X，$*$）是以0为恒等元的对合群的充要条件是它满足（1），（2），（3），（4）。

证 由定理2.5及定理1即知。 Q·E·D·

类似于定理1，我们有结合BCI—代数的下列特征：

定理3〔注210〕 （2，0）型的代数〈X；$*$，0〉是结合的BCI-代数当且仅当〈X；$*$，0〉满足下列条件：（1），(2)，（4）和

$$0*x=x。\qquad (5)$$

证 “⇒”，这是显然的。

“⇐”。我们只需验证满足Ⅰ—1，Ⅰ—2和Ⅰ—5即可。

证满足公理Ⅰ—1，事实上，$\forall x, y, z\in X$，

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)$$
$$=((x*y)*x)*((z*z)*y)$$
$$=((x*y)*x)*(0*y)$$
$$=((x*y)*x)*y$$
$$=(x*y)*(x*y)$$
$$=0。$$

证满足公理Ⅰ-2. 事实上，易知$\forall x$，$y\in X$有

$$(x*(x*y))*y=(x*x)*(y*y)=0*0=0.$$

证满足公理Ⅰ-5. 设$x*0=0$，欲证$x=0$. 由于（2），只要证

$$0*x=0. \tag{6}$$

为此，我们分别计算：

$$\begin{aligned}0*(0*x)&=(x*0)*(0*x)\\&=x*((0*0)*x)=x*(0*x)\\&=x*x=0.\end{aligned}$$

上面最后第二个等式用到了已知条件（5）. 此外，

$$(0*x)*0=0*(x*0)=0*0=0.$$

这样，据（2）而有（6）. 从而再由（2）便有$x=0$.

Q·E·D·

我们也可类似于定理2那样利用定理3而给出对合群的一个特征. 这里不再予以列出了. 下面我们再给出结合BCI-代数的一个特征.

定理4〔注211〕 （2，0）型的代数$\langle X;*,0\rangle$是结合的BCI-代数当且仅当$\langle X;*,0\rangle$满足条件（1），（2），（4）及

$$x*y=y*x. \tag{7}$$

证 “⇒”，显然.

“⇐”. 分别验证满足公理Ⅰ—1，Ⅰ—2，Ⅰ—5.

验证满足Ⅰ—1，事实上，$\forall x$，y，$z\in X$，

$$\begin{aligned}&((x*y)*(x*z))*(z*y)\\&=((x*y)*z))*(x*(z*y))\end{aligned}$$

$$= ((x * y) * z) * ((x * y) * z)$$
$$= 0.$$

验证满足 I-2。同定理3的证明。

验证满足 I-5，设 $x * 0 = 0$，故 $0 * x = x * 0 = 0$，由（2）即知 $x = 0$。 Q. E. D.

2. 子代数

对于子代数我们有下列结果：

定理5〔注212〕 如果BCI-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 具有结合性，则其子代数亦然，亦即结合性是一个遗传性。 Q. E. D.

对于结合BCI-代数来讲，子代数和理想是一致的，即有下列：

定理6 （雷天德，〔15〕），设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个结合的BCI-代数，则S是X的一个子代数当且仅当S是X的一个理想，

即
$$ID(X) = IDS(X). \tag{8}$$

证 "$\Rightarrow$"。设S是X的一个子代数，且 $x \in S$，$y * x \in S$。则 $0 \in S$，且

$$y = y * 0 = y * (x * x) = (y * x) * x \in S,$$

最后一式是由于S是子代数，因此对运算 $*$ 封闭。

"$\Leftarrow$"，设S是X的一个理想，对于任意的 x，$y \in S$，则有

$$(x * y) * y = x * (y * y) = x * 0 = x \in S,$$

又因 $y \in S$ 及S是一个理想，故 $x * y \in S$，从而S是X的一个子代数。

Q·E·D·

3. 积代数

关于两个结合BCI-代数的积代数仍具有结合性，这一结果

是正确的，即有下列：

定理7[注213] 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是结合BCI-代数$\langle X_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$和结合BCI-代数$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$的积代数，则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是结合的。

证 设$(x,\ y)$，(u,v)，$(a,\ b)$是X的任意三个元素，则

$$
\begin{aligned}
&((x,y)*(u,v))*(a,b)\\
&=(x*_1u,y*_2v)*(a,b)\\
&=((x*_1u)*_1a,(y*_2v)*_2b)\\
&=(x*_1(u*_1a),y*_2(v*_2b))\\
&=(x,y)*(u*_1a,v*_2b)\\
&=(x,y)*((u,v)*(a,b)).
\end{aligned}
$$

因此，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是结合的。

Q·E·D·

由此，我们可以得到下列关于对合群的一个结果：

定理8[注214] 设$(X_1,\ *_1)$是以0_1为恒等元的对合群，$(X_2,\ *_2)$是以0_2为恒等元的对合群，命

$$
\left.\begin{aligned}
&X=X_1\times X_2,\\
:\ &(x_1,x_2)(y_1,y_2)=(x_1*_1y_1,x_2*_2y_2),\\
&0=(0_1,0_2),
\end{aligned}\right\}\quad(9)
$$

则$(X,\ *)$是以0为恒等元的对合群。 Q·E·D·

利用数学归纳法我们可以把定理7推广为任意有限个结合BCI-代数的乘积的情形，不过，我们有下列一般结果：

定理9[注215] 结合性是一个可积性

证 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一族结合BCI-代数$\{\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle:\alpha\in I\}$的积代数。对于X中的任意三个元素$f,g,\ h$，对于

任意的$\alpha \in I$，我们有：

$$((f*g)*h)(a)=(f(a)*ag(a))*_a h(a)$$
$$=f(a)*_a(g(a)*_a h(a))$$
$$=(f*(y*h))(a),$$

故有

$$(f*g)*h=f*(g*h),$$

因此$\langle X; *, 0\rangle$是结合的。

Q·E·D·

注1 我们利用"归纳地积代数法"（见定理Ⅳ·1·10前）可知，结合BCI-代数有无限多个。

注2 设$\{(X_\alpha, *_\alpha):\alpha \in I\}$是一族对合群，其中$(X_\alpha, *_\alpha)$的恒等元为$0_\alpha$，$\alpha \in I$。命

$$\left.\begin{aligned}&X=\prod\{X_\alpha:\alpha \in I\},\\&*:(f*g)(\alpha)=f(\alpha)*_\alpha g(\alpha),\ \alpha \in I.\\&0:0(\alpha)=0_\alpha,\ \alpha \in I,\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

则称$(X, *)$为这一族对合群的乘积。由定理9我们有下列：

定理10[注216] 一族对合群$\{(X_\alpha, *_\alpha):\alpha \in I\}$（其中$(X_\alpha, *_\alpha)$的恒等元为$0_\alpha$，$\alpha \in I$）的乘积$(X, *)$是以0为恒等元的对合群。

Q·E·D·

结合性是否逆可积性呢？这个问题的回答是肯定的，我们有下列：

定理11[注217] 设$\langle X; *, 0\rangle$是一族BCI-代数$\{X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle:\alpha \in I\}$的积代数，如果$\langle X; *, 0\rangle$是结合的，那么对于每个$a \in I$，$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$也具有结合性，即结合性是一个逆可积性。

证 设x_α，y_α，z_α是X_α中的任意三个元素，我们命

$$f(\beta)=\begin{cases}x_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}\qquad g(\beta)=\begin{cases}y_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}$$

$$h(\beta)=\begin{cases}z_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}$$

则f，g，$h\in X$。由于X是结合的，因此

$$(f*g)*h=f*(g*h),$$

从而对于$\alpha\in I$有

$$((f*g)*h)(\alpha)=(f*(g*h))(\alpha),$$

于是，

$$(f(\alpha)*_\alpha g(\alpha))*_\alpha h(\alpha)$$
$$=f(\alpha)*_\alpha(g(\alpha)*_\alpha h(\alpha)),$$

即

$$(x_\alpha*_\alpha y_\alpha)_\alpha*_\alpha z_\alpha=x_\alpha*_\alpha(y_\alpha*_\alpha z_\alpha),$$

所以每个$\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle$都是具有结合性的。

Q·E·D·

由此，我们可以得到关于对合群的一个对应结果：

定理12〔注218〕 设（X，$*$）是一族群的乘积，如果（X，$*$）是一个对合群，那么每个因子群也是对合群。

Q·E·D·

4．同态、理想、商代数

定理1·5指出，结合性是一个同态不变性，即如果f是BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到BCI-代数$\langle Y;\ \perp,\ \theta\rangle$上的一个同态映射，且$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是结合的，则$\langle Y;\ \perp,\ \theta\rangle$也具有结合性。对于同构对应我们有下列易知的结果：

定理13〔注219〕 如果f是结合BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到(2, 0)型的代数$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$上的一个同构映射，则$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$也是结合的BCI-代数。 Q. E. D.

对于商代数，我们有下列结果：

定理14〔注220〕 如果$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个结合的BCI-代数，A是X的任一理想，则商代数$\langle X/A;\ *,\ C_0\rangle$是结合的，即结合性是一个可商性。

证 由定理Ⅱ·9·6知，典则映射是一个同态映射，因此由定理Ⅰ·5知，$\langle X/A;\ *,\ C_0\rangle$是具有结合性的。

Q·E·D·

特别地，有下列：

定理15〔注221〕 设f是结合BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到BCI-代数$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$的一个同态映射，则商代数$\langle X/ker(f);\ *,\ C_0\rangle$具有结合性。 Q·E·D·

我们知道，结合BCI-代数与对合群是等价的。而理想可生成BCI-代数的商群，不变子群可生成群的商群。那么，理想与不变子群有什么关系呢？理想生成的商代数与不变子群生成的商群有什么关系呢？下列结果给出回答：

定理16〔注222〕 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个结合的BCI-代数，$(X,\ *)$是对应于它的一个对合群，且非空集合$A\subseteq X$，则

A是X的一个理想$\Longleftrightarrow$A是$(X,\ *)$的一个不变子群，而且，如果A是X的理想，则商代数$\langle X/A;\ *,\ C_0\rangle$所对应的对合群$(X/A, *)$正是群$(X,\ *)$的由不变子群A生成的商群；反之，如果A是对合群$(X,\ *)$的一个不变子群，则商群$(X/A,\ *)$对应的结合BCI-代数$\langle X/A;\ *, C_0\rangle$正是BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$由理想A所生成的商代数。

证 我们分别证明于下：

1）第一个结论成立是由于：

A是$\langle X; *, 0\rangle$的一个理想$\Longleftrightarrow$A是$\langle X; *, 0\rangle$的一个子代数

$\Longleftrightarrow$A是X中对运算$*$封闭的子集，且$0\in A$

$\Longleftrightarrow$A是群$(X, *)$的一个子群

$\Longleftrightarrow$A是群$(X, *)$是一个不变子群，

最后一个等价性是由于交换群中的每个子群皆是不变子群。

2）设A是结合BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$的一个理想，$(X, *)$是$\langle X; *, 0\rangle$所对应的对合群。由1），A亦是群$(X, *)$中的一个不变子群。设$\langle X/A; *, C_0\rangle$是由理想A生成的商代数，它所对应的合群应是

$$M=(X/A, *)。$$

设群$(X, *)$（以0为恒等元）由不变子群A所生成的商群为N，我们要证M＝N。

在证这个事实之前，我们先给出几个引理。

引理1〔注213〕 设A是结合BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$的一个理想，$\langle X/A; *, C_0\rangle$是商代数，则

$$C_0=A。\tag{11}$$

证 由定理Ⅱ·9·4的1）知$C_0\subseteq A$，现设x是A的任一元素，由于定理Ⅱ·2·6，

$$x*0=x\in A,$$

由定理2·2知，

$$0*x=x\in A,$$

故 $x\sim 0$，即 $x\in C_0$，从而 $A\subseteq C_0$。因此（11）成立，

Q·E·D·

引理2〔注224〕 设A是结合BCI-代数 $\langle X;*,0\rangle$ 的一个理想，$\langle X/A;*,C_0\rangle$ 是商代数，对合群 $(X,*)$（以 0 为恒等元）是 $\langle X;*,0\rangle$ 所对应的对合群，N是群 $(X,*)$ 由不变子群生成的商群，则 $\forall x\in X$，

$$C_x=xA=\{x*z:z\in A\}. \tag{12}$$

证 因 $y\in C_x\Longleftrightarrow y\sim x$

$\Longleftrightarrow y*x\in A,\ x*y\in A.$

$\Longleftrightarrow \exists z\in A,\ x*y=z$（因 $x*y=y*x$）

$\Longleftrightarrow x*y=z\in A.$

$\Longleftrightarrow \exists z\in A,\ x*(x*y)=x*z$

$\Longleftrightarrow \exists z\in A,\ y=x*z$

$\Longleftrightarrow y\in xA.$ Q·E·D·

引理3〔注225〕 在引理 2 的条件下，对于任意的 x，$y\in X$，

$$C_x*C_y=C_{x*y}=(x*y)A=xA*_{,}A. \tag{13}$$

Q·E·D·

现在我们来证明定理 14 的第二个结论。由引理 2 知，作为集合，M＝N，由引理 3 知，群M与N中的二元运算是一致的。所以对合群M＝对合群N。

3）设A是对合类 $(X,*)$（以 0 为恒等元）的一个不变子群，群 $(X,*)$ 对应结合BCI-代数 $\langle X;*,0\rangle$，商群 $(X/A,*)$ 对应的结合BCI-代数为 $\langle X/A;*,A\rangle$，而结合BCI-代数 $\langle X;*,0\rangle$ 由理想A生成的商代数为M，欲证 $M=\langle X/A;*,A\rangle$。

由引理2可知，作为集合$M=X/A$，由引理1知$C_0=A$，由引理3知M与代数$\langle X/A;\ *,\ A\rangle$运算一致，故$M=\langle X/A;\ *,\ A\rangle$。　　　　　　　　　　Q·E·D·

5．关于hom（X，Y）．

在定义Ⅱ·1·3中，我们在BCI-代数类中引入了同态的概念及记号hom（X）及hom（X，Y）．1984年，K·Iséki和A·B·Thaheem在〔51〕中在集合hom(X)中引入了一种二元运算，即有下列：

定义1　设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个BCI—代数．对于任意的f，$g\in$ hom（X），命

$$\left.\begin{array}{l} f\,\overline{*}\,g:\ X\longrightarrow X,\\ \qquad x\longmapsto f(x)*g(x), \end{array}\right| \qquad (14)$$

即

$$(f\,\overline{*}\,g)(x)=f(x)*g(x).$$

一般地说，$f,g\in$ hom（X）并不能断言$f\,\overline{*}\,g\in$ hom(X)．但是，当X是结合BCI-代数时，可以证明hom(X)对$\overline{*}$封闭，即有下列：

定理17　（K·Iséki和A·B·Thaheem,〔51〕）如果$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个结合BCI-代数，f，$g\in$ hom（X），那么$f\,\overline{*}\,g\in$ hom（X）．

证　对于任意的$x,y\in X$有：

$$\begin{aligned}(f\,\overline{*}\,g)(x*y)&=f(x*y)*g(x*y)\\ &=(f(x)*f(y))*(g(x)*g(y))\\ &=(f(x)*(g(x)*g(y)))*f(y)\\ &=((f(x)*g(x))*g(y))*f(y)\\ &=((f(x)*g(x))*f(y))*g(y)\end{aligned}$$

$= (f(x) * g(x)) * (f(y) * g(y))$

$= (f \overline{*} g)(x) * (f \overline{*} g)(y),$

故 $f \overline{*} g \in \mathrm{hom}(X)$. Q. E. D.

由定理17进一步可以得到下列：

定理18 （K·Iséki 和A·B·Thaheem，〔51〕）．如果$\langle X; *, 0\rangle$是一个结合BCI-代数，那么$\langle \mathrm{hom}(X); \overline{*}, 0\rangle$也是一个结合BCI-代数，其中O如下地定义：

$$\left.\begin{array}{l} O: X \longrightarrow X, \\ x \longmapsto 0. \end{array}\right\} \qquad (15)$$

证 容易验证公理Ⅰ-1—Ⅰ-5成立，此处从略。

Q·E·D·

1984年3月，西北大学数学系八〇级学生张颐独立地得到了下列结果，其本身是定理17和定理18的推广（但是，他在不知道〔51〕的情形下得到的）：

定理19 如果$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$是一个结合BCI-代数，那么$\langle \mathrm{hom}(X,Y); \odot, O\rangle$也是一个结合的BCI-代数，其中：

$$\left.\begin{array}{l} O: X \longrightarrow Y, \\ x \longrightarrow \theta, \end{array}\right\} \qquad (16)$$

而二元运算$\odot$定义为：$\forall f, g \in \mathrm{hom}(X,Y)$，

$$(f \odot g)(x) = f(x) \curlywedge g(x), \quad \forall x \in X \qquad (17)$$

Q·E·D·

§4 结合BCI-代数的性质（Ⅲ）

我们在这一章中继续来讨论结合BCI-代数的性质。在这一

节中我们再集中解决结合BCI-代数的高型拟可换性问题。本节中的主要工作都是作者在〔34〕中所做的工作。

我们在第四章§1中曾列出了如下两个没有证明的结果：

定理Ⅳ·1·5．〔注139〕 任何结合的真BCI-代数是一个$(i,j;m,n)$型的拟可换的真BCI-代数，其中i，j,m,n皆是非负整数，且$i+j$与$m+n$不同奇偶。

定理Ⅳ·1·6．〔注140〕 存在任意2^p阶的$(i,j;m,n)$型的拟可换的结合的真BCI-代数，其中i,j,m,n皆是非负整数，且$i+j$与$m+n$不同奇偶。

我们在这一节中主要要来证明这两个结果。我们先给出几个引理。

引理1 （雷天德，〔39〕。）存在任意2^n阶的结合的真BCI-代数，其中$n\geqslant 1$。

证 设$X=\{0,1\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

，

则$\langle X;*,0\rangle$是一个结合的BCI-代数。此即为$n=1$时命题为真。将$\langle X;*,0\rangle$连乘n次，所得的积代数为$\langle Y;\curlywedge,\theta\rangle$，由定理3·9知，$\langle Y;\curlywedge,\theta\rangle$是一个$2^n$阶的结合的BCI-代数。显然。对于$n\geqslant 1$，$\langle Y;\curlywedge,\theta\rangle$皆为真BCI-代数。

Q·E·D·

引理2〔注216〕 设$\langle X;*,0\rangle$是一个结合的真BCI-代数．则对于任意的x，$y\in X$有

$$Q_{0,0}(x,y)=y, \tag{1}$$

$$Q_{n,0}(x,y)=\begin{cases}Q_{0,0}(x,y),\ n=2K,\ K\text{为非负整数},\\ x,\quad n=2K+1,\ K\text{为非负整数}.\end{cases} \tag{2}$$

证 因为X具有结合性，故

$$Q_{0,0}(x,\ y)=x*(x*y)=(x*x)*y=0*y=y,$$

后一等式用到了定理2·2，这就证得了（1）。

为证（2），我们作下列计算：

$$Q_{n,0}(x,y)-Q_{0,0}(x*y)*\overbrace{(x*y)*\cdots*(x*y)}^{n}. \tag{3}$$

当 n 为偶数时，设 $n=2K$，K 为一个非负整数，此时（3）为：

$$Q_{2k,0}(x,y)=Q_{0,0}(x,y)*(\underbrace{(x*y)*\cdots*(x*y)}_{2K})$$

$$=Q_{0,0}(x,y)*(\underbrace{((x*y)*(x*y))*\cdots*((x*y)*(x*y))}_{K})$$

$$=Q_{0,0}(x,y)*(\underbrace{0*0*\cdots*0}_{K})$$

$$=Q_{0,0}(x,y)*0$$

$$=Q_{0,0}(x,y).$$

这就得到了（2）中 $n=2K$ 时的等式。

当 n 为奇数时，设 $n=2K+1$，K 为一个非负整数，则（3）为：

$$\begin{aligned}Q_{2k+1,0}(x,y)&=Q_{2k,0}(x,y)*(x*y)\\&=Q_{0,0}(x,y)*(x*y)\\&=y*(x*y)\\&=y*(y*x)\end{aligned}$$

$= 0 * x$

$= x$.

Q·E·D·

由引理2我们可以得到下列结果：

定理1[注227] 任何结合的真BCI–代数是（2K，0；2j+1，0）型的拟可换的真BCI–代数，也是（2j+1，0；2K，0）型的拟可换的真BCI–代数，其中K，j是任意的非负整数。

证 由引理2可知有下列各式成立：对于任意的$x, y \in X$，

$$Q_{2K,0}(x, y) = y = Q_{2j+1,0}(y, x),$$

$$Q_{2j+1,0}(x, y) = x = Q_{2K,0}(y, x).$$

因此本定理成立。 Q·E·D·

注 定理1实际上已说明了作者给出了K·Iséki提出的问题Ⅳ·1的肯定回答。而且利用引理1证明中给出的例子结合的真BCI–代数$X_2(I)$及引理1，我们不难给出一批高型（2K，0；2j+1，0）或（2j+1，0；2K，0）的拟可换的真BCI–代数，只要取K及j为任意的自然数即可。

下面我们继续给出一个引理。

引理3[注228] 设⟨X；∗，0⟩是一个结合的真BCI–代数。则对于任意的$x, y \in X$及任意的非负整数m和n有下式成立：

$$Q_{m,n}(x, y) = \begin{cases} Q_{0,0}(x, y), & \text{当 } m = 2K,\ n = 2j \text{ 或 } m = 2K+1,\ n = 2j+1 \text{ 时}, \\ x, & \text{当 } m = 2K,\ n = 2j+1 \text{ 或 } m = 2k+1.\ n = 2j \text{ 时} \end{cases} \tag{4}$$

其中K和j为非负整数。

证 我们分别验证之。

1）当 $m=2K, n=2j$ 时。

$$Q_{m,n}(x,y)=Q_{2K,2j}(x,y)$$

$$=Q_{2K,0}(x,y)*\underbrace{(y*x)*\cdots*(y*x)}_{2j}$$

$$=Q_{2K,0}(x,y)*0$$

$$=Q_{2K,0}(x,y)$$

$$=Q_{0,0}(x,y).$$

2）当 $m=2K,\ n=2j+1$ 时。

$$Q_{m,n}(x,y)=Q_{2K,2j+1}(x,y)$$

$$=Q_{2K,2j}(x,y)*(y*x)$$

$$=Q_{0,0}(x,y)*(y*x)$$

$$=(x*(x*y))*(y*x)$$

$$=x*((x*y)*(y*x))$$

$$=x*((x*y)*(x*y))$$

$$=x*0$$

$$=x.$$

3）当 $m=2K+1, n=2j$ 时。

$$Q_{m,n}(x,y)=Q_{2K+1,2j}(x,y)$$

$$=Q_{2K,2j}(x,y)*(x*y)$$

$$=Q_{0,0}(x,y)*(x*y)$$

$$=(x*(x*y))*(x*y)$$

$$=x*((x*y)*(x*y))$$

$$=x*0$$

$$=x.$$

4）当 $m=2K+1,\ n=2j+1$ 时。

$$
\begin{aligned}
Q_{m,n}(x,y) &= Q_{2K+1,2j+1}(x,y)\\
&= Q_{2k+1,2j}(x,y)*(y*x)\\
&= x*(y*x)\\
&= x*(x*y)\\
&= Q_{0,0}(x,y).
\end{aligned}
$$
Q·E·D·

由引理 2 和引理 3 可知成立下列：

定理2[注229] 设〈X；$*$，0〉是一个结合的真 BCI- 代数，则对于任意的 x，$y\in X$ 和任意的整数 m 和 n 有

$$Q_{m,n}(x,y)=\begin{cases} x, \text{当 } m \text{ 和 } n \text{ 奇偶相异时}, \\ y, \text{当 } m \text{ 和 } n \text{ 同奇偶性}. \end{cases} \tag{5}$$

现在，我们来证明本节的两个主要结果：

定理Ⅳ·1·5的证明 设〈X；$*$，0〉是一个结合的真 BCI- 代数，由于 $i+j$ 和 $m+n$ 不同奇偶，由定理 2 知，对于任意的 x，$y\in X$ 成立

$$Q_{i,j}(x,y)=Q_{m,n}(y,x).$$

故〈X；$*$，0〉是 $(i,j;\ m,n)$ 型的拟可换的真 BCI- 代数。
Q·E·D·

例 1 X_2（I）是（3，4；8，8）型的拟可换的真BCI—代数。

定理Ⅳ·1·6.的证明 由引理 1 及定理Ⅳ·1·5．即知。
Q·E·D·

注 定理 1 及定理Ⅳ·1·5 和定理Ⅳ·1·6 已肯定地回答了 K·Iséki关于高型拟可换 BCI- 代数的存在性问题。作者是一九八二年十一月解决这个问题的。稍晚，在〔15〕中宣布了一个纯高型拟可换BCI-代数的例子（见第四章§1，例Ⅳ·1·4）．

§5　结合BCI-代数的性质（Ⅳ）

在本节中，我们再来讨论结合BCI-代数的一些性质。

1．一些特征性质

在本章§2和§3中我们已经介绍过结合BCI-代数的一些等价定义或特征性质。这里，我们再来补充介绍几个结合BCI-代数的特征性质。

1984年3月，西大数学系八〇级学生李金龙得到下列结果：

定理1　一个BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$是结合的当且仅当对于任意的$x, y\in X$有

$$(y*x)*x=y. \tag{1}$$

证　必要性。设$\langle X; *, 0\rangle$是一个结合BCI—代数，x，y是X中的任二元素，则

$$(y*x)*x=y*(x*x)=y*0=y.$$

充分性。设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，且（1）成立。则在（1）中命$y=x$便有

$$(x*x)*x=x.$$

于是有：

$$0*x=x, \qquad \forall x\in X.$$

由定理2·8知，$\langle X; *, 0\rangle$是结合的。　　Q·E·D·

李金龙还得到了下列：

定理2　在BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$中下列条件是等价的：

1）X是结合的；

2）X满足：对于任意的$x, y, z\in X$成立

$$x*(y*z)=y*(x*z); \tag{2}$$

3）X满足：对于任意的$x, y \in X$成立

$$x * (y * x) = y. \qquad (3)$$

证 1）⇒2）．因X是结合的，故对于X中的任意三个元素x，y, z有

$$\begin{aligned} x*(y*z) &= (x*y)*z \\ &= (y*x)*z \\ &= y*(x*z). \end{aligned}$$

2）⇒3）．在（2）中命$z = x$，则有

$$x*(y*x) = y*(x*x) = y*0 = y.$$

3）⇒1），由（3）知对于任意的$x, y \in X$有

$$(x*(y*x))*y = 0,$$

即有

$$(x*y)*(y*x) = 0. \qquad (4)$$

在（4）中互换x与y，则有

$$(y*x)*(x*y) = 0. \qquad (5)$$

由于（4）和（5）同时成立，故（由（Ⅰ—4）知）

$$x*y = y*x.$$

由定理2·8知，⟨X；*，0⟩是结合的。 Q·E·D·

2．具有条件（S）的性质．

在前面的定理1·3，定理Ⅳ·1·5及定理Ⅳ·1·6中我们曾经介绍过结合性与拟可换性的密切关系。自然地，应当提出下列：

问题1 结合BCI-代数是否具有条件（S）？

这是作者在1984年3月给西北大学数学系八〇级学生提出的一个练习问题．学生冯绮云对这个问题给出了肯定回答，即有下列：

定理3　如果x,y是结合BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$的任二元素，则

$$A(x,y)=\{x*y\}. \tag{6}$$

因此，结合BCI-代数是具有条件（S）的，且

$$x\circ y=x*y. \tag{7}$$

证　设$\langle X; *, 0\rangle$是一个结合BCI-代数．对于任意的$x,y\in X$，有

$$((x*y)*x)*y=(x*y)*(x*y)=0.$$

故

$$x*y\in A(x,y).$$

现设$u\in A(x,y)$。于是，

$$(u*x)*y=0.$$

由于

$$0=(u*x)*y=u*(x*y),$$

故　$u\leqslant x*y$。

又因为X是结合的，故

$$(x*y)*u=u*(x*y)=0,$$

因此，$x*y\leqslant u$。因此，$u=x*y$。

所以，$A(x,y)=\{x*y\}$。这样，便有

$$x\circ y=x*y.$$

因此，$\langle X; *,0\rangle$是具有条件（S）的。　　Q·E·D·

由此可得下列：

推论　结合BCI-代数的子代数、理想、商代数以及一族结合BCI-代数的积代数都是具有条件（S）的BCI-代数。

Q·E·D·

由定理3而自然应当考虑下列：

问题2 具有条件（S）的BCI-代数是否一定是结合的呢？

冯绮云对这个问题给出了否定回答，即有下列：

定理4 存在具有条件（S）的非结合的BCI-代数。

证 见下列例1。 Q·E·D·

例1 设$X=\{0,1,2\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	0	1
2	2	1	0

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCI-代数。

容易算出，$\circ$的运算表如下：

$\circ$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	1
2	2	1	2

因此$\langle X; *, 0\rangle$是一个具有条件（S）的BCI-代数。

但是，X不是结合的，因为

$$0*2=0\neq 2=2*0,$$

或

$$0*2=0\neq 2.$$

由定理3和定理4立即得到下列：

定理5 结合BCI-代数类是具有条件（S）的BCI-代数类的一个真子类。 Q·E·D·

3．关于同态的一些结果。

李金龙在1984年3月得到了下列结果：

定理6 设f是结合BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$到(2，0)型代数$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$上的满同态，且满足条件：

$$f(0)=\theta, \tag{8}$$

$$f(x)=\theta \Rightarrow x=0, \tag{9}$$

则$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$是结合BCI-代数。

证 我们利用定理3·3所给出的结合BCI-代数的特征性质来证明，只要作如下的验证：

1）$\forall y \in Y$，由于f是满的，故$\exists x \in X$，使

$$f(x)=y.$$

故有

$$y \curlywedge y = f(x) \curlywedge f(x) = f(x * x) = f(0) = \theta.$$

2）设y_1，$y_2 \in Y$，如果成立

$$y_1 \curlywedge y_2 = y_2 \curlywedge y_1 = \theta. \tag{10}$$

由于f是满的，因此$\exists x_1$，$x_2 \in X$，使

$$f(x_1)=y_1, \qquad f(x_2)=y_2.$$

于是，由（10）可知

$$f(x_1) \curlywedge f(x_2) = f(x_2) \curlywedge f(x_1) = \theta,$$

即有

$$f(x_1 * x_2) = f(x_2 * x_1) = \theta,$$

从而由（9）可知

$$x_1 * x_2 = x_2 * x_1 = 0.$$

由于$\langle X; *, 0\rangle$是BCI-代数，故$x_1 = x_2$。这样，$y_1 = y_2$。

3）设y_1，y_2，y_3是Y中的任意三个元素，任取x_1，x_2，$x_3 \in X$，使

$$f(x_i)=y_i, \qquad i=1, 2, 3.$$

那么，有

$$
\begin{aligned}
(y_1 \curlywedge y_2) \curlywedge y_3 &= (f(x_1) \curlywedge f(x_2)) \curlywedge f(x_3) \\
&= f(x_1 * x_2) \curlywedge f(x_3) \\
&= f((x_1 * x_2) * x_3) \\
&= f(x_1 * (x_2 * x_3)) \\
&= f(x_1) \curlywedge f(x_2 * x_3) \\
&= f(x_1) \curlywedge (f(x_2) \curlywedge f(x_3)) \\
&= y_1 \curlywedge (y_2 \curlywedge y_3).
\end{aligned}
$$

4）设 y 是Y中的任一元素．任取 $x \in X$，使 $f(x)=y$。则有

$$\theta \curlywedge y = f(0) \curlywedge f(x) = f(0 * x) = f(x) = y.$$

这样，由定理3·3知，$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$是结合BCI–代数。

Q·E·D·

李金龙还给出了下列结果：

定理7　设f是（2，0）型代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到结合BCI–代数$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$的单同态，且满足$f(0)=\theta$，则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是结合的BCI–代数.

证　我们仍用定理3.3而作如下验证：

1）$\forall x \in X$有

$$f(x * x) = f(x) \curlywedge f(x) = \theta.$$

由于f是单的，故有

$$x * x = 0.$$

2）设 x，$y \in X$，满足

$$x * y = y * x = 0.$$

于是，我们有

$$f(x * y) = f(y * x) = f(0),$$

即有

$$f(x)\curlywedge f(y)=f(y)\curlywedge f(x)=\theta.$$

由于$\langle Y;\ \curlywedge,\theta\rangle$是一个 BCI-代数，因此$f(x)=f(y)$。又因$f$是单的，故 $x=y$。

3）设x，y，z是X中的任意三个元素．由于

$$\begin{aligned}f((x*y)*z)&=f(x*y)\curlywedge f(z)\\&=(f(x)\curlywedge f(y))\curlywedge f(z)\\&=f(x)\curlywedge(f(y)\curlywedge f(z))\\&=f(x)\curlywedge(f(y*z))\\&=f(x*(y*z)),\end{aligned}$$

又因f是单的，故有

$$(x*y)*z=x*(y*z).$$

4）设x是X的任一元素。因

$$f(0*x)=f(0)*f(x)=\theta\curlywedge f(x)=f(x),$$

及f是单的，而有

$$0*x=x,\ \forall x\in X.$$

因此，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是结合BCI-代数。

Q·E·D·

4．反同态和反同构．

李金龙在1984年3月还引入了下列概念：

定义1 设f是BCI-代数$\langle X;*,0\rangle$到BCI-代数$\langle Y;\ \curlywedge,0\rangle$中的一个映射。如果对于任意的$x$，$y\in X$，有

$$f(x*y)=f(y)\curlywedge f(x),\qquad (11)$$

则称在映射f下$\langle X;\ *,\ 0\rangle$与$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$反同态，记为

$$f:\mathrm{BCI}\langle X;\ *,\ 0\rangle\overset{(反)}{\sim}\mathrm{BCI}\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle,$$

在不致于混淆时也可简记为$f:X\overset{(反)}{\sim}Y$。

如果f：$X\overset{(反)}{\sim}Y$是一个双射，则称f为一个反同构。

例 2 设$X=\{0, 1, 2\}$，X中的二元运算$*$定义如下表：

$*$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数。

又设$Y=\{\theta, a, b, c\}$，Y中的二元运算由下表给出：

人	θ	a	b	c
θ	θ	c	b	a
a	a	θ	c	b
b	b	a	θ	c
c	c	b	a	θ

，

则$\langle Y; 人, \theta\rangle$是一个BCI-代数。

命

$$f: X\longrightarrow Y,$$

$$0\longmapsto\theta,\quad 1\longmapsto\theta,\quad 2\longmapsto b.$$

容易验证，f是BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$到BCI-代数$\langle Y; 人, \theta\rangle$中的一个反同态。

现在，我们来讨论反同态的一些性质。李金龙首先得到下列：

定理 8 设f：$BCI\langle X; *, 0\rangle\overset{(反)}{\sim}BCI\langle Y; 人, \theta\rangle$。则：

1）$f(0)=\theta$。

2）如果x，$y\in X$满足$x*y=0$，则

$$f(y)\curlywedge f(x)=\theta.$$

证 1）可以算出：

$$f(0)=f(0*0)=f(0)\curlywedge f(0)=\theta.$$

2）设 x，$y\in X$，满足 $x*y=0$。则

$$f(y)\curlywedge f(x)=f(x*y)=f(0)=\theta. \qquad Q\cdot E\cdot D\cdot$$

李金龙得到了下列有趣的结果：

定理 9 设f是 BCI-数代$\langle X;\ *,0\rangle$到BCI-代数$\langle Y;\ \curlywedge,0\rangle$上的一个反同构映射，则$\langle X;*,\ 0\rangle$与$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$都是结合BCI-代数。

证 先证$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是结合的。对于任意的 $x\in X$我们有

$$f(0*x)=f(x)\curlywedge f(0)=f(x)\curlywedge\theta=f(x).$$

由于定理 8 的 1）及f是单射，则

$$0*x=x.$$

由定理 3·3 知，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是结合的。

再证$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$是结合的。我们只要证明 f是一个同构映射即可。事实上，对于任意的 x，$y\in X$ 有

$$f(x*y)=f(y*x)=f(x)\curlywedge f(y),$$

这里用到了X的结合性及f 是一个反同态。因此，f 是X到Y 上的一个同构对应。由于$\langle X;\ *,\ 0\rangle$ 是结合的，故 $\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$是结合的。 Q·E·D·

其实，李金龙还分别得到下列的两个结果：

定理10 设f是BCI-代数$\langle X;\ *,0\rangle$到BCI-代数$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$上的一个反同态，则是$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$是结合的BCI-代数。

证 对于任意的$y\in Y$，由于f 是满的，故 $\exists x\in X$，使$f(x)=y$。于是，我们有

$$\theta\curlywedge y=f(0)\curlywedge f(x)=f(x*0)=f(x)=y.$$

由定理 3.3 知，$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$是结合的。　　　Q·E·D·

定理11　设f是BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$到BCI-代数$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$的一个反同态，且是一个单射，则$\langle X; *, 0\rangle$是结合的 BCI-代数。

证　定理 9 证明的第一部分其实只用到了f是一个反同态和是一个单射.　　　Q·E·D·

李金龙还得到了下列关于子代数的结果：

定理12　设f：BCI $\langle X; *, 0\rangle \overset{(反)}{\sim}$ BCI$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$。

1）$f^{-1}(\theta) = \{x \in X : f(x) = \theta\}$ 是 $\langle X; *, 0\rangle$ 的一个子代数。

2）如果S是$\langle X; *, 0\rangle$的一个子代数，则$f[S]$是 $\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$的一个子代数。

3）若S是$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$的一个子代数，则$f^{-1}[S]$是$\langle X; *, 0\rangle$的一个子代数。

证　1）显然，$0 \in f^{-1}(\theta)$。$\forall x, y \in f^{-1}(\theta)$，由于

$$f(x * y) = f(y) \curlywedge f(x) = \theta \curlywedge \theta = \theta,$$

故$x * y \in f^{-1}(\theta)$。因此，$f^{-1}(\theta)$是$\langle X; *, 0\rangle$的子代数。

2）因 $0 \in S$，故 $\theta = f(0) \in f[S]$。$\forall y_1, y_2 \in f[S]$，则$\exists x_1, x_2 \in S$，使

$$f(x_1) = y_1, \ f(x_2) = y_2.$$

于是，我们有

$$y_1 \curlywedge y_2 = f(x_1) \curlywedge f(x_2) = f(x_2 * x_1).$$

因S是一个子代数，故 $x_2 * x_1 \in S$，从而$y_1 \curlywedge y_2 \in f[S]$。所以，$f[S]$是$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$的一个子代数。

3）因 $\theta \in S$，而 $\theta = f(0)$，因此$0 \in f^{-1}[S]$。$\forall x_1, x_2 \in$

$f^{-1}[S]$，$\exists y_1, y_2 \in S$，使得

$$y_1 = f(x_1),\quad y_2 = f(x_2).$$

由于S是Y的一个子代数，故

$$f(x_1 * x_2) = f(x_2) \curlywedge f(x_1) = y_2 \curlywedge y_1 \in S.$$

从而，$x_1 * x_2 \in f^{-1}[S]$。所以，$f^{-1}[S]$是$\langle X; *, 0\rangle$的一个子代数。 Q·E·D·

§6 有限结合的BCI-代数

在前面讨论了一般的结合BCI-代数的基础上，我们在本节中集中地介绍一下有关有限结合BCI-代数的一些结果。

1．结构问题

雷天德在〔39〕中研究了有限结合的BCI-代数，得到了几个有趣的结果。我们在这里介绍一下他的一些结果。先给出下列：

引理1 有限指数的可换P—群皆是其循环子群的直和。

Q·E·D·

这是一个群论中的结果，读者如要详细地了解它，可参看有关群论的著作，例如，M·I·Kargapolov 和 J·I·Merzljakov 的 "Fundamentals of the Theory of Groups" (1976) P·P· 61—62 (New York)．

定理1 （雷天德，〔39〕．）有限结合BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$是有限个二阶理想的积：

$$X = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n\rangle, \qquad (1)$$

其中$\langle a_i\rangle$表示X的一个二阶理想，$|\langle a_i\rangle| = 2$．

证 由定理2·4知，(X, $*$)是一个对合群，从而是(循环)指数为2的可换2-群。因此，群(X, $*$)中的非零循环子群

只能是二阶循环群 $\{0, a_i\}$，$i=1, 2, \cdots, n$。由于每个$\{0, a_i\}$对运算$*$封闭，故它是一个子代数，由定理 3·6 知，它又是一个理想。由引理 1 知，（1）成立。　　Q·E·D·

注　（1）中的等式是同构意义下相等。

一个自然应当考虑的问题是下列：

问题 1　定理 1 的逆成立吗？

1984年 4 月，西北大学数学系八〇级学生井爱雯对问题 1 给出了否定回答，举出了下列反例：

例 1　设 $X=\{0,1,2,3\}$，X 中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	3	0	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	0	3	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数。容易看出，$\langle X; *, 0\rangle$的仅有的二阶理想是

$$A=\{0, 2\}, \quad B=\{0, 3\}$$

而且，A和B亦是X的两个子代数。现命

$$\left.\begin{array}{c} Y=A\times B, \\ \curlywedge: (x_1, y_1)\curlywedge(x_2, y_2)=(x_1*x_2, y_1*y_2), \\ \mathscr{O}=(0, 0), \end{array}\right\}$$

则$\langle Y; \curlywedge, \mathscr{O}\rangle$是一个BCI-代数，但不是结合的，因

$$(0,0)\curlywedge(2,0)=(0*2, 0*0)=(0,0)\neq(2,0)。$$　　Q·E·D·

如果命

$$a^{\varepsilon}=\begin{cases}0, & \varepsilon=0, \\ a, & \varepsilon=1,\end{cases} \tag{2}$$

由结合性且按同构意义，公式（1）中X的每一元素皆可唯一地表示为

$$x=a_1^{\varepsilon_1}*a_2^{\varepsilon_2}\cdots*a_n^{\varepsilon_n}\varepsilon_i=\begin{cases}0,\\1,\end{cases} \tag{3}$$

因此可有下列：

定理 2 （雷天德，〔39〕。）设〈X；∗，0〉是一个有限结合的BCI-代数，则

$$X=\left\{a_1^{\varepsilon_1}*a_2^{\varepsilon_2}*\cdots*a_n^{\varepsilon_n}:\varepsilon_i=0\text{或}1,i=1,\cdots,n\right\}, \tag{4}$$

从而 $|X|=2^n$。 Q·E·D·

推论 奇数阶或非 2^n 的偶数阶 BCI-代数一定不是结合的 BCI-代数。 Q·E·D·

注 2^n阶的非结合的BCI-代数也存在。见下列

例 2 $X=\{0,1,\cdots,2^n-1\}$，X中二元运算∗定义为：

$$x*y=\begin{cases}0, & x\leqslant y\leqslant 2^n-1,\\1, & y<x<2^n-1,\ y\neq 0,\\2^n-1, & y<x=2^n-1,\ y\neq 0,\\x, & y<x\leqslant 2^n-1,\ y=0,\end{cases}$$

则〈X；∗，0〉是一个非结合的BCI-代数。（见〔39〕。）

2．同构问题。

有限阶结合 BCI-代数的同构条件特别简单，这由下列结果给出：

定理 3 （雷天德，〔39〕。）设$\langle X_1;*_1,0_1\rangle$与$\langle X_2;*_2,0_2\rangle$是两个有限结合BCI-代数。则 $X_1\simeq X_2\Longleftrightarrow X_1$与$X_2$的阶相等。

证 “⇒”．显然。

“⇐”．若 X_1 与 X_2 都是 2^n 阶的，则

$$X_1=\left\{a_1^{\varepsilon_1}*_1a_2^{\varepsilon_2}*_1\cdots*_1a_n^{\varepsilon_n}:\varepsilon_i=0,1,i=1,\cdots,n\right\},$$

$$X_2=\left\{ b_1^{\varepsilon_1}*_2 b_2^{\varepsilon_2}*_2\cdots *_2 b_n^{\varepsilon_n}:\varepsilon_i=0,1,i=1,\cdots,n\right\}.$$

由于结合性及表示的唯一性，则映射

$$f: a_1^{\varepsilon_1}*_1 a_2^{\varepsilon_2}*_1\cdots *_1 a_n^{\varepsilon_n}\to b_1^{\varepsilon_1}*_2 b_2^{\varepsilon_2}*_2\cdots *_2 b_n^{\varepsilon_n}$$

是$\langle *_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$到$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$上的一个同构映射。

Q·E·D·

这样，在同构的意义下，阶为2^n的结合BCI-代数只有一个。利用这个结果，李金龙在1984年3月得到了下列结果：

定理 4 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$和$\langle Y;\ \curlywedge,\theta\rangle$是两个有限的且是同阶的BCI-代数，则X和Y都是结合的充要条件是$\langle X;\ *,\ 0\rangle$与$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$反同构。

证 充分性已由定理5.9给出。现证必要性。事实上，如果X和Y是两个有限阶的，同阶的结合BCI-代数，由定理3知，$X\simeq Y$。即对于任意的$x,\ y\in X$，有

$$f(x*y)=f(x)\curlywedge f(y),$$

其中f是X到Y的同构对应。由于Y是结合的，故有

$$f(x*y)=f(y)\curlywedge f(x).$$

因此，f是X到Y的反同构。故$\langle X;\ *,0\rangle$与$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$反同构。

Q·E·D·

3．子代数问题。

利用定理3·13，井爱雯得到了下列结果：

定理 5 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个有限的结合BCI-代数，Y是一个集合，$|Y|=|X|$，任取X到Y上的一一映射f，命

$$\left.\begin{array}{l}\theta=f(0),\\ \curlywedge:\ y_1\curlywedge y_2=f(f^{-1}(y_1)*f^{-1}(y_2)),\end{array}\right\}\quad(5)$$

则$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$是一个结合的BCI-代数，且称为由$\langle X;\ *,\ 0\rangle$及

f 导入的结合 BCI-代数.

证 因对于任意的 x_1, $x_2 \in X$有

$$f(x_1) \curlywedge f(x_2) = f(f^{-1}(f(x_1)) * f^{-1}(f(x_2)))$$
$$= f(x_1 * x_2),$$

故f是从结合BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$到 (2,0) 型代数$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$的一个同构对应，由定理 3·13 知，$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$是结合的BCI-代数。 Q·E·D·

利用这一结果，井爱雯进一步得到了下列结果：

定理 6 设X，Y与f同定理 5，且$X \cap Y = \Phi$。令

$$Z = X \cup Y$$

$\forall x$, $y \in Z$, 定义如下的$\odot$：

$$x \odot y = \begin{cases} x * y, & x, y \in X, \\ f^{-1}(x) * f^{-1}(y), & x, y \in Y, \\ f(x) \curlywedge y, & x \in X, y \in Y, \\ x \curlywedge f(y), & y \in X, x \in Y. \end{cases}$$

则有

1）$\langle Z; \odot, 0\rangle$是一个结合BCI-代数。

2）X是Z的一个子代数。

3）如果$|X| = 2^n$，则$|Z| = 2 \cdot |X| = 2^{n+1}$。

证 利用定理 3·3 易证$\langle Z; \odot, 0\rangle$是一个结合BCI-代数（验证留给读者）。后二事实是显然的。 Q·E·D·

注 这个定理给出了由一个 2^n 阶结合 BCI-代数产生一个 2^{n+1}阶结合BCI-代数、且使前者为后者的子代数的方法。

易知，有下列结果：

定理 7 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数. A是X的子代数，B是A的子代数，则B是X的子代数。 Q·E·D·

井爱雯给出了下列有趣的例子：

例 3 设$X_1=\{0, 1\}$，命

$*_1$	0	1
0	0	1
1	1	0

，

则$\langle X_1; *_1, 0\rangle$是一个$2^1$阶的结合BCI-代数。

命$Y_1=\{2, 3\}$，$\langle Y_1; 人_1, 2\rangle$是由$X_1$决定的结合BCI-代数（$f_1$：$0\longmapsto 2$，$1\longmapsto 3$）。$\odot_1$实际上由下表给出，而$Z_1=X_1\cup Y_1=\{0, 1, 2, 3\}$：

$\odot$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

。

则$\langle Z_1; \odot_1, 0\rangle$是一个结合的$2^2$阶的BCI-代数，且以$X_1$为$2^1$阶子代数。

再命$Y_2=\{4, 5, 6, 7\}$，$\langle Y_2; 人_2, 4\rangle$为由$\langle Z_1; \odot_1, 0\rangle$决定的结合BCI-代数；进而可产生$2^3$阶的结合BCI-代数$\langle Z_2; \odot_2, 0\rangle$，其中$Z_2=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$而$\odot_2$的乘法表实际上是：

$\odot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

。

这时，X_1和Z_1分别是Z_2的2^1和2^2阶子代数。

由于上面的定理5，定理6和定理7的保证而可继续这样做下去，从而井爱雯得到了下列结果：

定理8 存在2^n阶的结合BCI-代数⟨X；$*$，0⟩，它具有一切2^k阶的子代数，其中$k\leqslant n$，k和n为非负整数。 Q.E.D.

§7 广义结合BCI-代数

定理2.8中给出了结合性的一个特征性质：对于BCI-代数⟨X；$*$，0⟩来说，X是结合的当且仅当

$$0*x=x,\quad \forall x\in X。\qquad (1)$$

我们在前面几节中已经看到，结合BCI-代数的这一特征在研究结合BCI-代数时起了很大的作用。尤其是定理3.3进一步利用（1）给结合BCI-代数一个较简明的判别方法。

1983年，雷天德在〔41〕中推广结合性而引入了广义结合性。广义结合BCI-代数具有一些非常良好的性质。在广义结合性引入之后，一些作者投入了这一方面的工作，得到了一批结果。

在这一节中我们来介绍一下有关广义结合性的一些主要结果。

1．广义结合BCI-代数的概念。

我们先介绍广义结合BCI-代数的下列定义：

定义1 （雷天德，〔41〕）．设⟨X；$*$，0⟩是一个BCI-代数。如果对于任意的$x\in X$有

$$0*(0*x)=x,\qquad (2)$$

则⟨X；$*$，0⟩叫做广义结合的或具有广义结合性的BCI-代数。

例1 结合BCI-代数皆是广义结合的。因若x是结合BCI-

代数⟨X；*，0⟩的任一元，则

$$0*(0*x)=0*x=x.$$

例 2　存在非结合的广义结合BCI-代数．设$X=\{0,1,2,3,4\}$，X中的二元运算*由下表给出：

*	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	1	0	4	3	2
2	2	1	0	4	3
3	3	2	1	0	4
4	4	3	2	1	0

则⟨X；*，0⟩是一个广义结合的BCI-代数，但不是结合的，因$0*1=4\neq 1$。

例 3　存在非广义结合的BCI-代数．设$X=\{0,\ a,\ b\}$，X中的二元运算*由下表给出：

*	0	a	b
0	0	0	b
a	a	0	b
b	b	b	0

则⟨X；*，0⟩是一个BCI-代数，但不是广义结合的，因$0*(0*a)=0\neq a$。

由例 1—例 3　可知成立下列事实：

定理 1　（雷天德，〔41〕．）广义结合BCI-代数类是BCI-代数类的一个真子类，结合BCI-代数类是广义结合BCI-代数类的一个真子类。　　　　Q．E．D．

广义结合性有下列特征：

定理 2　（雷天德，〔41〕．）设⟨X；*，0⟩是一个BCI-代数，则X是广义结合的当且仅当对于X中的任意两个元素y、z有

$$y*(0*z)=z*(0*y), \tag{3}$$

证 "⇒". 因 $y*(0*z)=(0*(0*y))*(0*z)$

$=(0*(0*z))*(0*y)$

$=z*(0*y)$.

"⇐". 因 $0*(0*x)=x*(0*0)=x*0=x$.

Q·E·D·

2. 广义结合BCI-代数与Abel（交换）群的关系

类似于结合BCI-代数与对合群的关系，广义结合 BCI-代数与 Abel 群也有密切的关系。

定理 3 （雷天德，〔41〕.）设$\langle X; *, 0\rangle$是一个广义结合的BCI-代数。在X中定义一个二元运算十：

$$十: x+y=x*(0*y), \forall x, y\in X, \tag{4}$$

则（X，十）是以 0 为零元的一个Abel群。

证 显然，X非空，且X对运算十封闭。下面验证：

1）X满足结合律。因

$$
\begin{aligned}
x+(y+z) &= x*(0*(y*(0*z))) \\
&= (y*(0*z))*(0*x) \\
&= (y*(0*x))*(0*z) \\
&= (x*(0*y))*(0*z) \\
&= (x+y)+z.
\end{aligned}
$$

2）X满足交换律。因

$$x+y=x*(0*y)=y*(0*x)=y+x.$$

3）0是零元，因$x+0=0+x=0*(0*x)=x$.

4）$0*x$ 是 x 的负元。因$x+(0*x)=(0*x)+x=(0*x)*(0*x)=0$.

Q·E·D·

注 对于结合BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$来说，由于

$$x+y=x*(0*y)=(x*0)*y=x*y,$$

故运算 + 和运算 $*$ 是一致的。

定义 2 （雷天德，〔41〕。）由一个广义结合的 BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 按（4）定义 +，得到的Abel群（X，+）称为广义结合BCI-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 的伴随群。

由一个Abel群出发也可得到一个广义结合的 BCI- 代数，即有下列：

定理 4 （雷天德，〔41〕。）设 $(X, +)$ 是以 0 为零元的一个 Abel 群，运算 $-$ 为运算 + 的逆运算，则（2，0）型代数 $\langle X; -, 0\rangle$ 是一个广义结合的BCI-代数。

证 显然，X对运算 $-$ 封闭。容易验证：

I—1. $((x-y)-(x-z))-(z-y)=0$.

I—2. $(x-(x-y))-y=0$.

I—3. $x-x=0$.

I—4. $x-y=y-x=0 \Rightarrow x=y$.

I—5. $x-0=0 \Rightarrow x=0$.

（1） $0-(0-x)=x$. Q·E·D·

定义 3 （雷天德，〔41〕。）由一个 Abel 群出发按定理 4 的方法确定的广义结合BCI-代数称为已知 Abel 群的伴随代数。

这里出现了一个问题：已知广义结合 BCI-代数 $\langle X; *, 0\rangle$，其伴随群为 $(X, +)$（0 为零元），而伴随群是Abel群，又有它的伴随代数 $\langle X; -, 0\rangle$。那么 $\langle X; *, 0\rangle$ 与 $\langle X; -, 0\rangle$ 有什么关系呢？下列定理给出了回答。

定理 5 （雷天德，〔41〕。）$\langle X; -, 0\rangle$ 就是 $\langle X; *, 0\rangle$。

证 设 x 和 y 是X 中的任二元，因为 $x+y=x*(0*y)$，故

$$x-y=x+(-y)=x+(0*y)=x*(0*(0*y))=x*y.$$

Q·E·D·

类似地，有下列：

定理 6 （雷天德，〔41〕）．设 $(X, +)$ 是以 0 为零元的一个Abel群，其伴随代数为 $\langle X; -, 0\rangle$，$\langle X; -, 0\rangle$（作为一个广义结合的BCI-代数）的伴随群是 $(X, +')$，则

$$(X, +) = (X, +').$$

证 因 $x +' y = x - (0 - y) = x + y$. Q·E·D·

对于同构而言，有下列结果：

定理 7 （雷天德，〔41〕.）设 $\langle X; *, 0\rangle$ 和 $\langle X'; *', 0'\rangle$ 是两个广义结合的BCI-代数，则 $\langle X; *, 0\rangle \simeq \langle X'; *', 0'\rangle$ $\Longleftrightarrow$ 它们的伴随群同构，即 $(X, +) \simeq (X', +')$.

证 "$\Rightarrow$"．设同构映射 f：$x \longrightarrow x' = f(x)$. 则

$$f(x + y) = f(x * (0 * y)) = f(x) *' (f(0) *' f(y))$$
$$= x' *' (0' *' y') = f(x' +' y').$$

因此 f 也是 $(X, +)$ 到 $(X', +')$ 上的一个同构映射.

"$\Leftarrow$"．设 f：$x \longmapsto x' = f(x)$. 由定理 5，只要证 $\langle X; -, 0\rangle \simeq \langle X'; -', 0'\rangle$. 事实上，因

$$f(x - y) = f(x + (-y)) = f(x) +' f(-y) = x' +' (-y')$$
$$= x' -' y' = f(x) -' f(y),$$

故 $\langle X; -, 0\rangle \simeq \langle x'; -', 0'\rangle$，从而 $\langle X; *, 0\rangle \simeq \langle X'; *', 0'\rangle$.

Q·E·D·

注 1 非广义结合BCI-代数不可能有伴随群．因有 $x \in X$，使 $0 * (0 * x) \neq x$，故 $0 + x \neq x$，即 0 不是零元.

注 2 非Abel群不可能有伴随代数．（参看〔15〕.）

3．广义结合BCI-代数的性质．

广义结合BCI-代数有下列性质：

定理 8 （郭秀云，〔44〕。）设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数。则$\langle X; *, 0\rangle$是广义结合的当且仅当$B(X)=\{0\}$。

证 “⇒”．设$x\in B(X)$。则$0*x=0$，从而$x=0*(0*x)$ $=0*0=0$，即$B(X)=\{0\}$。

“⇐”．设$x\in X$，命$x_1=0*(0*x)$，则

$$x_1*x=(0*(0*x))*x=(0*x)*(0*x)=0.$$

另一方面，由定理Ⅱ·2·7。有

$$(x_1*x_1)*(x*x_1)\leqslant x_1*x=0,$$

由Ⅰ—5知，$(x_1*x_1)*(x*x_1)=0$，即$0*(x*x_1)=0$。故$x*x_1\in B(X)$，从而$x*x_1=0$。由Ⅰ—4知，$x=x_1=0*(0*x)$，因此$\langle X; *, 0\rangle$是广义结合的。 Q·E·D·

由此可知成立下列：（从而，和结合性一样，广义结合性也是BCI-代数理论一个固有的性质。）

推论 （郭秀云，〔44〕。）一个BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$具有广义结合性的充要条件是$X=\{0\}$，即$\langle X; *, 0\rangle$是平凡的。

证 “⇒”．由定理8知。“⇐”．显然， Q·E·D·

下列事实是显然成立的：

定理 9 （雷天德，〔15〕。）广义结合性是一个遗传性。

Q·E·D·

定理10 （雷天德，〔15〕。）广义结合BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$的任一子代数皆为理想。

证 设S为它的一个子代数，且$\langle X; *, 0\rangle$的伴随群为$(X, +)$，0为它的零元。显然，$0\in S$。如果$x, y\in S$。则$x-y=x*y\in S$，故S是群$(X, +)$的一个子群。因此，S对+封闭。这样，如果$x\in S$，$y-x=y*x\in S$，那么$y=(y-x)+x\in S$。从而S是$\langle X; *, 0\rangle$的一个理想。 Q·E·D·

定理11〔注230〕 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个广义结合的BCI-代数，其伴随群为（X，+），以0为零元，$A\subseteq X$，则A是$\langle X;\ *,\ 0\rangle$的一个子代数$\Longleftrightarrow$A是（X，+）的一个子群。

证 “⇒”，定理10的证明已给出。“⇐”，设A是(X，+)的一个子群，故$0\in A$。设x，y是A中任二元素，则$x-y\in S$。从而$x*y=x-y\in S$。故S是$\langle X;\ *,\ 0\rangle$的一个子代数。

Q·E·D·

推论〔注231〕 条件同定理11。如果A是(X，+)的一个不变子群，则A是$\langle X;\ *,\ 0\rangle$的一个理想。

证 由定理11和定理10知。 Q·E·D·

定理12〔注232〕 设$\langle X;\ *,0\rangle$是一个广义结合的BCI-代数，它的伴随群为(X，+)，以0为零元，A是(X，+)的任一子群（因而是不变子群)，由A产生的商群为(X/A，+)。则由(X/A，+）产生的伴随代数就是$\langle X;\ *,\ 0\rangle$的由A（作为理想）产生的商代数。

为证这个定理，先给出下列：

引理1〔注233〕 在定理12的条件下，对于任意的$a\in X$，有

$$C_a=aA. \tag{5}$$

证 设$x\in C_a$，则$x*a=x-a\in A$。设$x-a=b$。故$x=a+b$。即$x\in aA$。因此$C_a\subseteq aA$。

又设$x\in aA$，因此$x=a+b$，$b\in A$。由于A是一个子群，因此$-b\in A$。故$x*a=x-a=b\in A$，$a*x=a-x=-b\in A$。于是，$x\sim a$。所以$x\in Ca$。这样便有$aA\subseteq Ca$。

我们证得了（5）. Q·E·D·

引理2〔注234〕 在定理12的条件下，对于任意的x，$y\in X$，有

$$C_x * C_y = xA - yA. \qquad (6)$$

证 事实上，$C_x * C_y = Cx_* y = (x_* y)A = (x_- y)A$

$$= (x + (-y))A = xA + (-y)A$$

$$= xA - yA. \qquad Q\cdot E\cdot D\cdot$$

定理12的证明 设由（X/A，+）产生的伴随代数为M，⟨X；∗，0⟩的由A产生的商代数为N。由引理1知，作为集合，M＝N。由引理2，M中的运算+′与N中的运算∗是一致的。因此M＝N。 Q·E·D·

完全类似地，我们可以得到下列：

定理13[注235] 设⟨X；∗,0⟩是一个广义结合的BCI-代数，其伴随群为(X，+)，A是⟨X；∗，0⟩的一个子代数，⟨X/A；∗，C_0⟩是商代数，它的伴随群正是群(X；+)以A为不变子群生成的商群。 Q·E·D·

定理14 （雷天德，〔15〕。）广义结合性是一个可商性。

Q·E·D·

定理15[注236] 广义结合性是一个可积性，也是一个逆可积性。

证 ⟨X；∗,0⟩是一族BCI-代数{⟨X_α；$*_\alpha$，0_α⟩:$\alpha \in$I}的积代数。

1）先证广义结合性是一个可积性，设每个⟨X_α；$*_\alpha$，0_α⟩是广义结合的，$\alpha \in$I。设$f \in$X。对于任意的$\alpha \in$I有

$$(0*(0*f))(\alpha) = 0(\alpha) *_\alpha (0(\alpha) *_\alpha f(\alpha)) = f(\alpha),$$

故$0*(0*f) = f$，因此⟨X；∗，0⟩是广义结合的。

2）再证广义结合性是一个逆可积性。设⟨X；∗，0⟩是广义结合的。设x_α是⟨X_α；$*_\alpha$，0_α⟩中的任一元素，$\alpha \in$I，命

$$f(\beta)=\begin{cases}x_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha.\end{cases}$$

因为⟨X；$*$，0⟩是广义结合的。故

$$0*(0*f)=f,$$

从而对于$\alpha\in$I有

$$(0*(0*f))(\alpha)=f(\alpha),$$

即

$$0(\alpha)*_\alpha(0(\alpha)*_\alpha f(\alpha))=f(\alpha),$$

亦即

$$0_\alpha*_\alpha(0_\alpha*_\alpha x_\alpha)=x_\alpha,$$

故⟨X_α；$*_\alpha$，0_α⟩($\alpha\in$I)皆是广义结合的。　Q·E·D·

定理16　（雷天德.〔15〕.）任意的广义结合BCI-代数⟨X；$*$，0⟩都是（0，1；0，0）型拟可换的BCI-代数。

证　因

$$Q_{0,1}(x,\ y)=(x-(x-y))-(y-x)=x,$$

$$Q_{0,0}(y,\ x)=y-(y-x)=x,$$

故⟨X；$*$，0⟩是(0，1；0，0)型拟可换的．　Q·E·D·

定理17〔注237〕　广义结合性是一个同态不变性。

证　设f是广义结合BCI-代数⟨X；$*$，0⟩到BCI-代数⟨Y；$\curlywedge$，θ⟩上的一个同态映射，y是Y中的任一元素，任取$x\in$X，使$f(x)=y$。则

$$0*(0*x)=x,$$

故

$$f(0*(0*x))=f(x),$$

因此有

$$f(0)\curlywedge(f(0)\curlywedge f(x))=f(x),$$

即

$$\theta \curlywedge (\theta \curlywedge y) = y,$$

故$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$是广义结合的。　　　　　　　　Q·E·D·

注　由于典则映射P是$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到$\langle X/A;\ *, C_0\rangle$上的一个同态映射，故特别地，可得到定理14。

4．广义结合性与结合性

1984年4月，李金龙得到下列结果：

定理18　设$\langle X;\ *, 0\rangle$是一个BCI-代数，则下列条件等价：

1）$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是广义结合的。

2）$x*(y*z) = z*(y*x)$，$\forall x, y, z \in X$。　　　　（7）

3）$x*(x*y) = y$。　　　　（8）

4）$0*(x*y) = y*x$。　　　　（9）

证　1）⇒2）．这是由于：

$$\begin{aligned} x*(y*z) &= x-(y-z) = x+(-(y-z)) \\ &= x+((-y)+z) = x+(z+(-y)) \\ &= (x+z)+(-y) = (z+x)+(-y) \\ &= z+(x+(-y)) = z+((-y)+x) \\ &= z+(-(y-x)) = z-(y-x) \\ &= z*(y*x). \end{aligned}$$

2）⇒3）．在（7）中命$y=x$，$z=y$，则

$$x*(x*y) = y*(x*x) = y*0 = y.$$

3）⇒4）．这是由于：

$$\begin{aligned} 0*(x*y) &= (x*x)*(x*y) \\ &= (x*(x*y))*x \\ &= y*x. \end{aligned}$$

4）⇒1）．在（9）中取$x=0$，则有

$$0*(0*y)=y*0=y.$$

由于y是X中的任一元素，据定义1，⟨X；$*$,0⟩是广义结合的。

Q·E·D·

注 1）$\Longleftrightarrow$2）是雷天德的定理2的一个推广。由（8）可有广义结合性的下列特征：

定理19[注238] 设⟨X；$*$,0⟩是一个BCI-代数。则X是广义结合的当且仅当X满足下列条件：

$$y*(x*(x*y))=0,\quad \forall x,y\in X, \tag{10}$$

或

$$y\leqslant x*(x*y),\quad \forall x,y\in X.$$

证 必要性。设X是广义结合的。于是（8）成立，从而（由Ⅰ—3知）（10）成立。

充分性。设X满足（10）。但由Ⅰ-2又有

$$(x*(x*y))*y=0,$$

再由Ⅰ-4知

$$x*(x*y)=y.$$

由定理18中1）$\Longleftrightarrow$3）而知，X是广义结合的BCI-代数。

Q·E·D·

李金龙还得到了下面几个有关广义结合BCI-代数的结果。

定理20 设BCI-代数⟨X；$*$,0⟩是广义结合的。如果x,y,z是X的任意三个元素，且$x\neq y$，

则 $$x*z\neq y*z,\quad z*x\neq z*y.$$

证 只用证第一式，第二式可类似地证明。用反证法，若当$x\neq y$时有$z\in X$使

$$x*z=y*z.$$

那么有

$$x-z=y-z,$$

即

$$x+(-z)=y+(-z).$$

于是，我们有

$$(x+(-z))+z=(y+(-z))+z$$

从而得到 $x=y$。矛盾。 Q·E·D·

定理21 在BCI-代数⟨X；∗，0⟩中如果满足下列条件：

$$(0*x)*x=x, \qquad \forall x\in X, \tag{11}$$

则X是广义结合的。

证 方法一。$\forall x\in X$ 由(11)有

$$((0*x)*x)*(0*x)=x*(0*x).$$

从而有

$$((0*x)*(0*x))*x=x*(0*x),$$

即

$$0*x=x*(0*x).$$

于是，我们有：

$$x=(0*x)*x=(x*(0*x))*x=(x*x)*(0*x)$$
$$=0*(0*x).$$

故X是广义结合的。 Q·E·D·

方法二。设 $x\in B(X)$，则 $0*x=0$。故

$$x=(0*x)*x=0*x=0.$$

因此 $B(X)=\{0\}$。所以，X是广义结合的（由定理8知）。

Q·E·D·

在什么条件下广义结合BCI-代数是结合的呢？李金龙给出了下面结果：

定理22 在广义结合BCI-代数⟨X；∗，0⟩中如果满足下

列条件：

$$(0*x)*x=0, \quad \forall x\in X, \tag{12}$$

则X是结合的。

证 由（12）对于任意的x，$y\in X$有

$$(0*(x*y))*(x*y)=0.$$

由于X是广义结合的，由（7）而有

$$(y*(x*0))*(x*y)=0.$$

故有

$$(y*x)*(x*y)=0.$$

互换x与y可有

$$(x*y)*(y*x)=0.$$

从而由Ⅰ-4知$x*y=y*x$。因此X是结合的。

Q·E·D·

李金龙还利用广义结合性而得到了结合性的下列特征：

定理23 设⟨X；$*$，0⟩是一个BCI-代数。则X是结合的当且仅当X满足下列条件：

$$x*(0*x)=0, \quad \forall x\in X. \tag{13}$$

证 必要性。这是由于

$$x*(0*x)=x*x=0.$$

充分性。设$x\in B(X)$，则$0*x=0$。由（13）而有

$$0=x*(0*x)=x*0=x.$$

故$B(X)=\{0\}$。由定理8，X是广义结合的。

由（13），对于任意的$x,y\in X$有

$$(x*y)*(0*(x*y))=0.$$

由于X是广义结合的，由（7）有

$$(x*y)*(y*(x*0))=0,$$

故

$$(x*y)*(y*x)=0.$$

互换 x 与 y 而有

$$(y*x)*(x*y)=0.$$

由 I－4 知，我们有：

$$x*y=y*x,\quad \forall x,\ y\in X.$$

由定理 2.8 知，X是结合的。　　　　Q·E·D·

§8　具有散子代数性质的BCI－代数

前面我们已经介绍了BCI－代数类中几种重要的子类，例如，BCK－代数类，结合 BCI－代数类和广义结合 BCI－代数类等。这些代数类之间的关系大体上如下面的图 5－1 所示。

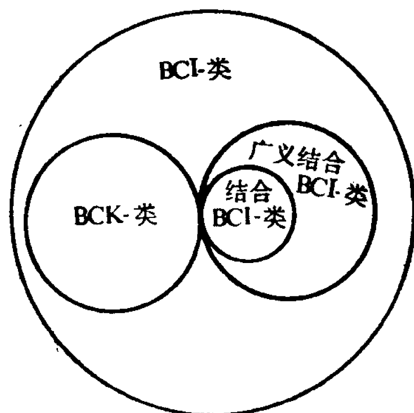


图 5－1

在这一节中，我们来介绍 BCI－代数类的一个新的子类——具有散子代数性质的 BCI－代数类。这是作者和李欣在 1984 年 4 月引入的一个新子类。这个代数类是BCI－代数类的一个新子类，

也是一个真子类，而BCK-代数类和广义结合BCI-代数类皆是它的真子类。

1．具有散子代数性质的BCI-代数的概念.

我们在定义Ⅲ·6·3中曾在BCI-代数中引入过一个记号：设〈X；＊，0〉是一个BCI-代数，

$$L(X)=(X-B(X))\cup\{0\}. \qquad (1)$$

定理Ⅲ·6·5指出：如果〈Y；＊，0〉是BCK-代数〈X；＊，0〉的一点扩张，那么L(Y)一定是Y的一个子代数。但是，一般地，虽然L(X)是BCI-代数〈X；＊，0〉的一个非空子集，但却不必是X的一个子代数。例Ⅲ·6·5给出了这样的一个反例。这样，我们有必要研究这样的BCI-代数〈X；＊，0〉，它的子集L(X)是X的一个子代数。为了方便起见，我们作下列：

定义1〔注239〕 设〈X；＊，0〉是一个BCI-代数。如果L(X)是X的一个子代数，则称〈X；＊，0〉具有散子代数性质。

我们给出具有散子代数性质的BCI-代数的几个自然的例子。

定理1〔注240〕 BCK-代数皆是具有散子代数性质的BCI-代数。（因此具有散子代数的性质是一种推广性质。）

证 设〈X；＊，0〉是任一BCK-代数，则B(X)＝X。故L(X)＝(X－B(X))∪{0}＝{0}。而{0}是X的一个子代数。故〈X；＊，0〉具有散子代数性质。

Q·E·D·

定理2〔注241〕 任意的广义结合BCI-代数皆是具有散子代数性质的BCI-代数。

证 设〈X；＊，0〉是一个任意的广义结合BCI-代数。由定理7·8知B(X)＝{0}。故

$$L(X)=(X-B(X))\cup\{0\}=X,$$

而X是X的一个子代数。因此，〈X；*， 0〉具有散子代数性质。

Q·E·D·

显然，我们可以给出BCK-代数和广义结合BCI-代数的下列特征：

定理3〔注242〕 设〈X；*， 0〉是一个BCI-代数．则

1）X是可BCK-化的充要条件是L(X)={0}。

2）X是广义结合的充要条件是L(X)=X。

证 1）必要性由定理1给出。现证充分性．由于

$$\{0\}=L(X)=(X-B(X))\cup\{0\},$$

故B(X)=X。因此，X可BCK-化。

2）必要性由定理2给出．现证充分性。

由于 $$X=L(X)=(X-B(X))\cup\{0\},$$

故B(X)={0}。由定理7.8知，X是广义结合的。

Q·E·D·

下面我们给出一个例子。

例1 设 X={0，1，2，3}，X中的二元运算*由下表给出：

*	0	1	2	3
0	0	3	0	1
1	1	0	1	3
2	2	3	0	1
3	3	1	3	0，

则〈X；*， 0〉是一个BCI-代数．易知，B(X)={0,2}。因此，〈X；*， 0〉不是BCK-代数，也不是广义结合BCI-代数。而L(X)={0，1，3}是X的一个子代数，故〈X；*，0〉是一个具有散子代数性质的BCI-代数。

由定理1，定理2，例1及例Ⅱ·6·5可得下列结果：

定理4〔注243〕 BCK-代数类、结合BCI-代数类和广义结合BCI-代数类皆是具有散子代数性质的BCI-代数类的真子类。具有散子代数性质的BCI-代数类是BCI-代数类的一个真子类。

Q·E·D·

对于基数问题和真类问题，由定理4及定理Ⅰ·1·1我们可知成立下列：

定理5〔注244〕 对于任意的基数$\gamma>0$，存在基数为γ的一个具有散子代数性质的BCI-代数。从而，一切具有散子代数性质的BCI-代数作成一个真类。 Q·E·D·

定理5虽然回答了具有散子代数性质的BCI-代数类的真类问题和基数问题。但是，它是建立在BCK-代数类的基数问题的解答（定理Ⅰ·1·1）的基础上的。因此，这个结果是不能令人满意的。自然应当提出下列：

问题1 对于任意的基数$\gamma\geqslant 3$，存在基数为γ的一个具有散子代数性质的BCI-代数，而不是BCK-代数，也不是广义结合BCI-代数吗？

为了方便起见，我们引入下列概念：

定义2〔注245〕 如果一个具有散子代数性质的BCI-代数$\langle X;*,0\rangle$不是BCK-代数，也不是广义结合BCI-代数，则称X为纯散的。

问题1现在可改述为：对于任意的基数$\gamma\geqslant 3$，存在基数为γ的一个纯散的BCI-代数吗？这里应对“$\gamma\geqslant 3$”这一条件作点说明。之所以要加上“$\gamma\geqslant 3$”，是由于$\gamma=1$和$\gamma=2$的情形不存在纯散的BCI-代数。$\gamma=1$和$\gamma=2$的情形，按同构的意义，BCI-代数一共三个（见下面的例2一例4），它们分别是BCK-

代数和结合的BCI-代数，因此皆是具有散子代数性质的BCI-代数，但不是纯散的。

例 2 设〈X；∗，0〉是平凡的BCK-代数，其中X = {0}。由定理1，〈X；∗，0〉是具有散子代数性质的。

证 3 设X = {0，1}，X中的二元运算∗由下表给出：

∗	0	1
0	0	0
1	1	0，

则〈X；∗，0〉是一个BCK-代数，因此也具有散子代数性质。

例 4 设X = {0，1}，X中的二元运算∗由下表给出：

∗	0	1
0	0	1
1	1	0，

则〈X；∗，0〉是一个结合BCI-代数。由定理2，〈X；∗，0〉也是具有散子代数性质的。

现在，我们对问题1给出下列肯定回答：

定理 6〔注246〕 对于任意的基数 $\gamma \geqslant 3$，存在基数为 γ 的一个纯散的BCI-代数。因此，纯散的BCI-代数类是一个真类。纯散BCI-代数类是具有散子代数性质的BCI-代数类的一个真子类。

证 1）设基数 $\gamma \geqslant 3$。

如果 γ 为自然数，命 $\beta = \gamma - 1$。则存在基数为 β 的BCK-代数〈X；∗，0〉。设〈Y；∗，0〉是〈X；∗，0〉的一点扩张，其中 $Y = X \cup \{a\}$，$a \bar{\in} X$，且 $|Y| = \gamma$。

如果 γ 为无限基数，则存在基数为 γ 的一个BCK-代数〈X；∗，0〉。设〈Y；∗，0〉是〈X；∗，0〉的一点扩张，其中 $Y = X \cup \{a\}$，$a \bar{\in} X$，且 $|Y| = |X| = \gamma$。

由定理Ⅱ·6·5知，$\langle Y; *, 0\rangle$具有散子代数性质。

由于 $\gamma\geqslant 3$，故$|Y|\geqslant 3$。任取$x\in Y-\{0, a\}$。则$x\in X=B(Y)$。因此，

$$\{0\}\subsetneqq B(Y)=X\subsetneqq Y.$$

所以，Y 是纯散的。

2）由1）知，纯散的BCI-代数类是一个真类。

3）显然。 Q·E·D·

2．具有散子代数性质的BCI-代数的性质。

李欣对具有散子代数性质的 BCI- 代数的性质作了一系列的讨论，得到了很多结果．这一部分中除注明的外皆是李欣得到的结果。

定理 7〔注247〕 如果$\langle X; *, 0\rangle$是具有散子代数性质的BCI-代数，则$\langle L(X); *, 0\rangle$是一个广义结合的BCI-代数。

证 因为$\langle X; *, 0\rangle$具有散子代数性质，因此$L(X)$是X的一个子代数，故$\langle L(X); *, 0\rangle$是一个BCI-代数．又因

$$B(L(X))=B((X-B(X))\cup\{0\})=\{0\},$$

由定理7·8知，$\langle L(X); *, 0\rangle$是广义结合的． Q·E·D·

由定理7可以得到下列：

定理 8 设$\langle X; *, 0\rangle$是具有散子代数性质的 BCI-代数。

1）如果$x\in B(X)$，$y\in X-B(X)$，则

$$x*y=0*y. \qquad (2)$$

2）如果$x\in X-B(X)$，$y\in B(X)$，则

$$x*y=x. \qquad (3)$$

证 1）设$x\in B(X)$，$y\in X-B(X)$。由定理Ⅱ·4·4知，$x*y\notin B(X)$。故 $x*y\in X-B(X)\subset L(X)$。由定理7知，$\langle L(X); *, 0\rangle$是广义结合的，故

$$x*y=0*(0*(x*y)).$$

由于$x\in B(X)$，故$0*x=0$，因此我们有：

$$\begin{aligned}x*y&=(0*x)*(0*(x*y))\\&=(0*(0*(x*y)))*x\\&=(x*y)*x\\&=(x*x)*y\\&=0*y.\end{aligned}$$

2）设 $x\in X-B(X)\subset L(X)$，$y\in B(X)$。由于 $L(X)$是广义结合的，故有

$$\begin{aligned}x*y&=(0*(0*x))*y\\&=(0*y)*(0*x)\\&=0*(0*x)\\&=x,\end{aligned}$$

这里用到了$y\in B(X)$（从而$0*y=0$）的条件。

Q·E·D·

定理 9 设$\langle X;*,0\rangle$是具有散子代数性质的BCI-代数。如果Y是X的子代数,则$\langle Y;*,0\rangle$也是具有散子代数性质的BCI-代数，即具有散子代数的性质是一种遗传性质。

证 因为Y是X的子代数，故易知有

$$B(Y)\subseteq B(X),\ L(Y)\subseteq L(X).$$

现证$L(Y)$是Y中的子代数。显然，$0\in Y$,从而$0\in L(Y)$。现设$x,y\in L(Y)$。由于$L(Y)\supseteq Y$,而Y是X的一个子代数，故$x*y\in Y$。又因$L(Y)\supseteq L(X)$,而$L(X)$是X的子代数,故$x*y\in L(X)$。这样,$x*y\in Y\cap L(X)=L(Y)$。所以$L(Y)$是Y的一个子代数。因此，$\langle Y;*,0\rangle$也具有散子代数性质。 Q·E·D·

注 定理9中如果X是纯散的，不能保证其每个子代数也是

纯散的．如例1中的BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是纯散的，但取$Y=\{0,\ 2\}$，易知Y是X的一个子代数，而$\langle Y;\ *,\ 0\rangle$是一个BCK-代数，并不是纯散的。

显然，有下列结果：

定理10 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是具有散子代数性质的BCI-代数，Y，Z是X的两个子代数，则$Y\cap Z$是X的子代数，且

$$L(Y\cap Z)=L(Y)\cap L(Z)。\quad Q\cdot E\cdot D\cdot \qquad (4)$$

由定理9易知成立下列：

定理11 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是具有散子代数性质的BCI-代数，M是X的任一非空子集，则唯一地存在包含M的最小的子代数

$$Y_M=\cap\{Y\subseteq X:Y\text{是子代数，且}M\subseteq Y\},\qquad (5)$$

且Y_M也具有散子代数性质。 Q·E·D·

下面我们来讨论具有散子代数的性质是否同态不变性的问题．为此，先给出下列三个引理：

引理1[注248] 设f是BCI-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到BCI-代数$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$中的一个同态，则

$$f[B(X)]\subseteq B(Y)。\qquad (6)$$

证 设$x\in B(X)$，则$0*x=0$．因为f是一个同态，故

$$f(0)\curlywedge f(x)=f(0*x)=f(0)。$$

由引理Ⅰ．1.1知$f(0)=\theta$，因此，

$$\theta\curlywedge f(x)=\theta,$$

即$f(x)\in B(Y)$。所以，$f[B(X)]\subseteq B(Y)$。 Q·E·D·

引理2[注249] 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个具有散子代数性质的BCI-代数．f是从$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到BCI-代数$\langle Y;\ \curlywedge,\theta\rangle$的一个同态，则

$$f[L(X)]\subseteq L(Y)。\qquad (7)$$

证 用反证法。设有$x\in L(X)$，使得 $f(x)\bar{\in} L(Y)$，因此$f(x)\in Y-L(Y)=B(Y)-\{0\}$。由定理7知，$\langle L(X);\ *,\ 0\rangle$是一个广义结合的BCI-代数，故

$$x=0*(0*x)。$$

由于f是一个同态，因此，

$$f(x)=f(0)\curlywedge(f(0)\curlywedge f(x))$$
$$=\theta\curlywedge(\theta\curlywedge f(x))。$$

由于$f(x)\in B(Y)-\{0\}$，故$\theta\curlywedge f(x)=\theta$，因此

$$f(x)=\theta\curlywedge\theta=\theta\in L(Y)。$$

这与假设矛盾。所以，（7）成立。 Q·E·D·

由引理1和引理2易知成立下列：

引理3〔注250〕 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个具有散子代数性质的BCI-代数。f是从$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到BCI-代数$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$上的一个同态，则

$$f[B(X)]=B(Y),\qquad f[L(X)]=L(Y)。\qquad (8)$$

Q·E·D·

现在，我们由引理3和定理Ⅱ·6·7立即可以得到下列：

定理12 具有散子代数性质是一个同态不变性。

Q·E·D·

对于积代数我们有下列结果：

定理13〔注251〕 具有散子代数的性质是一个可积性，也是一个逆可积性。

证 1）证它是一个可积性。设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一族具有散子代数性质的BCI-代数$\{\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle:\alpha\in I\}$的积代数。设$f$，$g$是$L(X)$中的任二元素。

如果$f=0$，$g=0$，则$f*g=0*0=0\in L(X)$。

如果 $f=0$，$g\neq 0$，则 $\exists\alpha\in I$，使 $g(\alpha)\neq 0_\alpha$，且 $g(\alpha)\notin B(X_\alpha)$。因为否则如果 $\forall\alpha\in I$，$g(\alpha)\in B(X_\alpha)$，由定理Ⅲ·5·5知，$g\in B(X)$。于是 $g\in B(X)\cap L(X)$，故 $g=0$。这与假设条件矛盾。现在，$g(\alpha)\in L(X_\alpha)-\{0_\alpha\}$。由于 X_α 具有散子代数性质，因此 $0_\alpha *_\alpha g(\alpha)\in L(X_\alpha)-\{0_\alpha\}$。于是，$f*g\in L(X)$。

如果 $f\neq 0$，则 $\exists\alpha\in I$，使得 $f(\alpha)\neq 0_\alpha$，且 $f(\alpha)\in L(X_\alpha)-\{0_\alpha\}$。由于 X_α 具有散子代数性质及定理8，总有 $f(\alpha)*_\alpha g(\alpha)=(f*g)(\alpha)\in L(X_\alpha)$。故 $f*g\in L(X)$。

这样，当 $f,g\in L(X)$，总有 $f*g\in L(X)$。因此 $L(X)$ 是X的一个子代数。所以，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$ 具有散子代数性质。

2）证具有散子代数的性质是一个逆可积性。

设具有散子代数性质的BCI－代数 $\langle X;\ *,\ 0\rangle$ 是一族BCI－代数 $\{\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle:\alpha\in I\}$ 的积代数。设 x_α，y_α 是 $L(X_\alpha)$ 的任二元素。

如果 $x_\alpha=y_\alpha=0_\alpha$，则 $x_\alpha *_\alpha y_\alpha=0_\alpha\in L(X_\alpha)$。

如果 $x_\alpha=0_\alpha$，$y_\alpha\neq 0_\alpha$，命 $z_\alpha=x_\alpha *_\alpha y_\alpha$，则断言 $z_\alpha\in L(X_\alpha)-\{0_\alpha\}$。事实上，用反证法，如果 $z_\alpha\in B(X_\alpha)$，命

$$f(\beta)=\begin{cases}x_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}\qquad g(\beta)=\begin{cases}y_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}$$

$$h(\beta)=\begin{cases}z_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}$$

则 $f,g,\ h\in X$，且 $h=f*g$。由于 $f,g\in L(X)$，而X具有散子代数性质，故 $h=f*g\in L(X)$。另一方面，由于 $h(\beta)\in B(X_\beta)$，$\beta\in I$，由定理Ⅲ·5·5知，$h\in B(X)$。这样 $h=0$。于是，$z_\alpha=0_\alpha$，即 $x_\alpha *_\alpha y_\alpha=0_\alpha$，或 $0_\alpha *_\alpha y_\alpha=0_\alpha$，故 $y_\alpha\in B(X_\alpha)$。这与 $y_\alpha\in L(X_\alpha)$

且$y_\alpha \neq 0_\alpha$的条件矛盾。

如果$x_\alpha \neq 0_\alpha$，则$z_\alpha = x_\alpha *_\alpha y_\alpha \in L(X_\alpha)$。这一事实可类似地用上面的反证法证明之。

这样，当x_α，$y_\alpha \in L(X_\alpha)$，总有$x_\alpha *_\alpha y_\alpha \in L(X_\alpha)$。因此，对于每个$\alpha \in I$，$L(X_\alpha)$是$X_\alpha$的子代数，从而$X_\alpha$是具有散子代数性质的，　　Q·E·D·

定理14〔注252〕　设$\langle X; *, 0\rangle$是具有散子代数性质的BCI-代数。

1)　如果A是X的一个理想和子代数，则

$$A = B(X) \cup (A \cap L(X)). \qquad (9)$$

2)如果A是L(X)（作为一个BCI-代数）的子代数，则$A \cup B(X)$是X的一个理想，且是X的一个子代数。

证　1)　对于任意的$x \in B(X)$，任取$y \in A \cap L(X)$，由定理8知，

$$x * y = 0 * y.$$

因为$y \in A \cap L(X)$，故$y \in A$，且$y \in L(X)$。由于A是X的一个子代数，L(X)是(X)的一个子代数，故$0 \in A$，$0 \in L(X)$。从而$0 * y \in A \cap L(X) \subseteq A$。故$x * y \in A$。因A是X的一个理想，故$x \in A$。于是，$B(X) \subseteq A$。这样，我们有

$$\begin{aligned} A = A \cap X &= A \cap (B(X) \cup L(X)) \\ &= (A \cap B(X)) \cup (A \cap L(X)) \\ &= B(X) \cup (A \cap L(X)). \end{aligned}$$

2)　设A是L(X)的一个子代数。

先证$A \cup B(X)$是X的一个理想。由于$0 \in B(X)$，故$0 \in A \cup B(X)$。为证$A \cup B(X)$是理想，我们只要证明：

$$\forall x \in A \cup B(X),\ \forall y \overline{\in} A \cup B(X),$$

$$\Rightarrow \quad y*x\overline{\in} A\cup B(X).$$

为证这个事实，分以下两个情形：

当$x\in B(X)$时，由定理8知，

$$y*x=y\overline{\in} A\cup B(X).$$

当$x\in A$且$x\overline{\in} B(X)$时。由定理7，$L(X)$是一个结合BCI-代数。已知A是$L(X)$的一个子代数，由定理V.7.10知，A是$L(X)$的一个理想，从而$y*x\overline{\in} A$（否则，由于$x\in A$，$y*x\in A$，从而$y\in A\subseteq A\cup B(X)$，矛盾）。因为$y\overline{\in} A\cup B(X)$，故$y\in L(X)$。由于$L(X)$是X的子代数，故$y*x\in L(X)$，即$y*x\overline{\in} B(X)$。这样，$y*x\overline{\in} A\cup B(X)$。

再证$A\cup B(X)$是X的一个子代数。已证$O\in A\cup B(X)$。设x，y是$A\cup B(X)$的任二元素。分以下四种情形：

如果$x\in A$，$y\in A$，因为A是$L(X)$的一个子代数，故$x*y\in A\subseteq A\cup B(X)$。

如果$x\in B(X)$，$y\in B(X)$，由定理Ⅱ·6·3知，$B(X)$是X的一个子代数，故$x*y\in B(X)\subseteq A\cup B(X)$。

如果$x\in A$，$y\in B(X)$，由定理8的2)，

$$x*y=x\in A\subseteq A\cup B(X)$$

（$x=0$亦可）。

如果$x\in B(X)$，$y\in A$，由定理8的1)，

$$x*y=0*y\in A\subseteq A\cup B(X).$$

因此，总有$x*y\in A\cup B(X)$。所以，$A\cup B(X)$是一个子代数。　　Q·E·D·

3．具有散子代数性质的BCI-代数的构造

由定理7可知，如果$\langle X;*,0\rangle$是具有散子代数性质的BCI-代数，那么$\langle B(X);*,0\rangle$是一个BCK-代数，而$\langle L(X),*,$

0⟩是一个广义结合的BCI-代数。

从而，

$$X = B(X) \cup L(X),$$
$$\{O\} = B(X) \cap L(X),$$

即X可以看作一个BCK-代数和一个广义结合BCI-代数 仅在O点处相交合并而成，它的直观图形如下列图 7 所示：

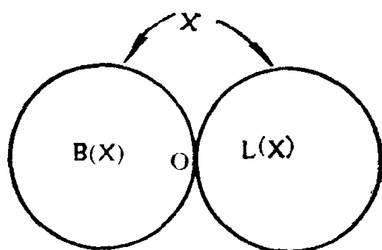


图 5－2

我们再进一步来讨论上述的具有散子代数性质的BCI-代数⟨X; ∗, 0⟩。我们来考察一下X中的二元运算∗。设x，y是X中的任二元素，显然有：

$$x*y=\begin{cases} x*y, & x\in B(X),\ y\in B(X), \\ x*y, & x\in L(X),\ y\in L(X), \\ 0*y, & x\in B(X),\ y\in L(X),\ y\neq 0, \\ x, & x\in B(X),\ y\in L(X),\ y=0, \\ x, & x\in L(X),\ y\in B(X). \end{cases} \tag{10}$$

（10）中的第三种情形和第五种情形据定理 8 而知，

一个自然的问题是下列：

问题 2 一个具有散子代数性质的BCI-代数可否考虑成一个BCK-代数和一个广义结合BCI-代数在某种意义下的并代数

呢？

李欣首先考虑了这个问题，而给出了一个肯定的回答。下面的几个结果都是李欣得到的。这里先从我们在Ⅱ·1中介绍的LX意义下的并代数谈起。定理Ⅱ·7·1给出了一个BCK-代数和一个BCI-代数的（LX）并代数，李欣先得到了下列结果：

定理15 一个BCK-代数$\langle X_1; *_1, 0\rangle$和一个具有散子代数性质的BCI-代数$\langle X_2; *_2, 0\rangle$的（LX）并代数$\langle X; *, 0\rangle$具有散子代数性质。

证 由于

$$B(X)=B(X_1\cup X_2)=B(X_2)\cup X_1=X_1\cup B(X_2),$$

故有

$$\begin{aligned}L(X)&=((X_1\cup X_2)-B(X))\cup\{0\}\\&=((X_1\cup X_2)-(X_1\cup B(X_2)))\cup\{0\}\\&=(X_2-B(X_2))\cup\{0\}\\&=L(X_2).\end{aligned}$$

由于$L(X_2)$是X_2中的子代数，故对于任意的x，$y\in L(X)$，则x，$y\in L(X_2)$，从而

$$x*y=x*_2y\in L(X_2)=L(X).$$

所以，$L(X)$是X的一个子代数，从而X具有散子代数性质。

Q·E·D·

由这个定理可得如下：

推论 一个BCK-代数和一个广义结合BCI-代数的(LX)并代数是一个具有散子代数性质的BCI-代数。 Q·E·D·

这个推论的逆也成立，即李欣得到的下列结果：

定理16 对于任意的具有散子代数性质的BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$，都存在一个BCK-代数$\langle X_1; *_1, 0\rangle$和一个广义结合BCI-

代数$\langle X_2; *_2, 0\rangle$，使$\langle X; *, 0\rangle$是$\langle X_1; *_1, 0\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0\rangle$的（LX）并代数。

证　命

$$\langle X_1; *_1, 0\rangle = \langle B(X); *, 0\rangle,$$

$$\langle X_2; *_2, 0\rangle = \langle L(X); *, 0\rangle,$$

则X_1与X_2的（LX）并代数X的二元运算$*$恰好与(10)一致（参看定理Ⅲ.7.1）．从而$\langle X; *, 0\rangle$正是BCK-代数$\langle B(X); *, 0\rangle$和广义结合BCI-代数$\langle L(X); *, 0\rangle$的（LX）并代数。　　　　Q·E·D·

第六章　BCK和BCI-拓扑代数

我们在第二章中简要地介绍了BCK-代数，又在第三章至第五章中较详细地介绍了BCI-代数。读者容易知道，上述四章中研究BCK和BCI-代数都仅仅考虑其代数结构。在这一章中我们对具有拓扑结构的BCK和BCI-代数作些简要的讨论。

§1　BCK和BCI-拓扑代数

类似于拓扑群、拓扑环、拓扑格等拓扑代数分支，我们也可以引入和研究BCK-拓扑代数和BCI-拓扑代数。在这一节中，我们对这种拓扑代数作些简单的讨论。

1．有关拓扑空间和拓扑群的预备知识

我们在这里只是罗列出要用到的有关拓扑空间和拓扑群的一些概念。有关拓扑空间的较详细的材料请参看〔10,11〕,有关拓扑群的材料请参看Л·C·邦德列雅金著的《连续群》（曹锡华译)。

定义1　一个拓扑空间（X，$\mathscr{T}$）是一个集合X，带有X上的一个拓扑结构$\mathscr{T}$，即X的一个子集族$\mathscr{T}$，使得

1）ϕ，$X\in\mathscr{T}$，

2）如果T_1，$T_2\in\mathscr{T}$，则$T_1\cap T_2\in\mathscr{T}$，

3）如果$\{T_i\colon i\in I\}\subseteq\mathscr{T}$，则$\cup\{T_i\colon i\in I\}\in\mathscr{T}$.

$\mathscr{T}$中的元素称为X中的开（子）集。

定义2　一个拓扑空间(X，$\mathscr{T}$)到一个拓扑空间（Y，$\mathscr{U}$）

里的一个映射f是连续的，如果每个开集的逆是开集，即$\forall U\in \mathscr{U}\Rightarrow f^{-1}[U]\in \mathscr{T}$。

定义 3 设G为一个集合，如果

1）（G，·）是一个群，

2）（G，$\mathscr{T}$）是一个拓扑空间，

3）G的运算·和求逆元运算在（G，$\mathscr{T}$）中连续，即

1° 运算·是积空间(X，$\mathscr{T}$)×（X，$\mathscr{T}$）到(X，$\mathscr{T}$)的一个连续映射，

2° 运算（ ）$^{-1}$是(X，$\mathscr{T}$)到（X，$\mathscr{T}$)的连续映射，

则称（G，·，$\mathscr{T}$）是一个拓扑群。

2. BCK-拓扑代数和BCI-拓扑代数

现在，我们来介绍BCK-拓扑代数和BCI-拓扑代数的概念。

定义 4〔注233〕 如果⟨X；∗，0⟩是一个BCK-代数，（X，$\mathscr{T}$）是一个拓扑空间，且

$$\left.\begin{array}{l}*:X\times X\rightarrow X,\\ (x,y)\longmapsto x*y,\end{array}\right\}\qquad (1)$$

是积空间（X×X；S）到（X，$\mathscr{T}$）的一个连续映射，则称⟨X；∗，0，$\mathscr{T}$⟩为一个BCK-拓扑代数。

定义 5〔注234〕 定义4中如果⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数，其余一样，则称⟨X；∗，0，$\mathscr{T}$⟩为一个BCI-拓扑代数。

注 关于∗的连续性条件可等价地述为：如果a和b是X中的任二元素，对于$a*b$的任一开邻域W，总存在a的开邻域U和b的开邻域V，

使得 $$UV\subseteq W,\qquad (2)$$

其中 $$UV=\{(x*y):x\in U和y\in V\}。\qquad (3)$$

例 1 设⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数（或BCK-代数），

$\mathscr{T}$是一个散拓扑或平庸拓扑，则⟨X；∗，0，$\mathscr{T}$⟩是一个BCI-拓扑代数（或BCK-拓扑代数），分别称为BCI（或BCK）-散拓扑代数或BCI（或BCK）-平庸拓扑代数。

定义6〔注255〕 如果BCI(BCK)-代数⟨X；∗，0⟩具有某个性质P，且⟨X；∗，0，$\mathscr{T}$⟩是一个BCI-(BCK-)拓扑代数，则称⟨X；∗，0，$\mathscr{T}$⟩为具有P的BCI(BCK)-拓扑代数。

如：结合的BCI-拓扑代数、广义结合的BCI-拓扑代数等。

3．结合的BCI-拓扑代数

对于结合的BCI-拓扑代数，我们有下列结果：

定理1〔注256〕 设⟨X；∗，0，$\mathscr{T}$⟩是一个结合的BCI-拓扑代数，则（X，∗，$\mathscr{T}$）是以0为恒等元的对合拓扑群（即每个元素皆为对合的拓扑群）；反之，如果（X，∗，$\mathscr{T}$）是以0为恒等元的对合拓扑群，则⟨X；∗，0，$\mathscr{T}$⟩是一个结合的BCI-拓扑代数。

证 1)设⟨X；∗，0，$\mathscr{T}$⟩是一个结合的BCI-拓扑代数。由定理Ⅴ.2.5知，(X，∗)是一个对合群，以0为恒等元。为证（X，∗，$\mathscr{T}$）是一个拓扑群，只要证∗连续及（ ）$^{-1}$连续。由于⟨X；∗，0，$\mathscr{T}$⟩是一个结合的BCI-拓扑代数，故∗连续。由于（X，∗）是一个对合群，因此求逆运算（ ）$^{-1}$实际上是恒等算子：

$$(\ )^{-1}: x \longmapsto x^{-1} = x,$$

因而（ ）$^{-1}$是显然连续的。这样，（X，∗，$\mathscr{T}$）是一个拓扑群。

2）设（X，∗，$\mathscr{T}$）是以0为恒等元的对合拓扑群，则⟨X；∗，0⟩是一个结合的BCI-代数。由于∗对于$\mathscr{T}$是连续的，故⟨X；∗，0，$\mathscr{T}$⟩是一个结合的BCI-拓扑代数。

Q·E·D·

为讨论两个结合BCI-拓扑代数的乘积，我们需要下列：

引理 1 两个拓扑群的乘积仍是拓扑群。

这个引理的证明可见Л·С·邦德列雅金的《连续群》。现在，我们可有下列：

定理 2[注257] 两个结合BCI-拓扑代数的乘积仍是结合BCI-拓扑代数。

证 由于定理 1 和引理 1，为证这个定理我们只要证明下列引理即可。 Q·E·D·

引理 2 两个对合群的乘积仍是对合群。

证 设 $(X_1, *_1)$ 和 $(X_2, *_2)$是两个对合群。$(X, *)$是它们的乘积。设 (x, y) 是X中的任一元素，由于

$$(x, y)*(x, y)=(x*_1x, y*_2y)=(0_1, 0_2)$$
$$=0,$$

其中0_1是X_1的恒等元，0_2是X_2的恒等元，0是X的恒等元，因此 $(X, *)$ 是一个对合群。 Q·E·D·

作为推广，我们可有下列：

定理 3[注258] 任意有限个结合BCI-拓扑代数的乘积是结合BCI-拓扑代数。 Q·E·D·

4. BCI-拓扑代数的乘积

由定理 2，我们自然要提出一个问题：两个任意的BCI-拓扑代数的乘积是否BCI-拓扑代数呢?这个问题的回答是肯定的。我们先给出一个引理，即下列：

引理 3[注259] 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，

$$\left.\begin{aligned}&Z=X\times X,\\&\circ:(x_1, y_1)\circ(x_2, y_2)=(x_1*x_2, y_1*y_2),\\&0_z=(0, 0),\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

且设W_1，W_2，W_3及W_4是X中的子集，则

$$(W_1 \times W_3) \circ (W_2 \times W_4) = (W_1 * W_2) \times (W_3 * W_4), \tag{5}$$

其中$W_i * W_j = \{x * y : x \in W_i,\ y \in W_j\}$。

证 我们计算如下：

$$\begin{aligned}
&(W_1 \times W_2) \circ (W_2 \times W_4) \\
&= \{(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) : x_1 \in W_1,\ x_2 \in W_2, y_1 \\
&\qquad \in W_3,\ y_2 \in W_4\} \\
&= \{(x_1 * x_2,\ y_1 * y_2) : x_1 \in W_1,\ x_2 \in W_2,\ y_1 \\
&\qquad \in W_3,\ y_2 \in W_4\} \\
&= (W_1 * W_2) \times (W_3 * W_4).
\end{aligned}$$

Q·E·D·

注 这个证明是纯粹集合论的，并不用“BCI”条件，改成BCK-代数，类似的引理亦真。

现在，我们给出下列：

定理 4〔注260〕 设$\langle X; *, 0, \mathscr{T}\rangle$是一个BCI-拓扑代数，$\langle Z, *, 0_Z\rangle$由（4）给出，$Z$带有乘积拓扑$\mathscr{S}$，则$\langle Z; \circ, O_z, \mathscr{S}\rangle$是一个BCI-拓扑代数，称为$\langle X; *, \mathscr{T}\rangle$的二次积BCI-拓扑代数。

证 由定理Ⅱ·5·1知，$\langle Z; *, O_Z\rangle$是一个BCI-代数。为证$\langle Z; \circ, 0_Z, \mathscr{S}\rangle$是一个BCI-拓扑代数，只要证$\circ$关于$\mathscr{S}$连续。

设(x_1, y_1)，(x_2, y_2)是Z中的任二元素。则

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 * x_2,\ y_1 * y_2).$$

设U是$(x_1 * x_2,\ y_1 * y_2)$关于$\mathscr{S}$的一个任意的开邻域。由于$\mathscr{S}$是乘积拓扑，故分别有$x_1 * x_2$和$y_1 * y_2$在X中的开邻域W_1，W_2，使到

$$V_1 \times V_2 \subseteq U.$$

由于$*$是从X×X到X的连续函数，故分别存在x_1，x_2，y_1，y_2的开邻域W_1，W_2,W_3及W_4。使得

$$W_1 * W_2 \subseteq V_1, \quad W_3 * W_4 \subseteq V_2.$$

故有

$$(W_1 * W_2) \times (W_3 * W_4) \subseteq V_1 \times V_2 \subseteq U.$$

由引理3知，有

$$(W_1 \times W_3) \circ (W_2 \times W_4) \subseteq U, \qquad (6)$$

其中$W_1 \times W_3$，$W_2 \times W_4$分别是Z中(x_1, y_1)及(x_2, y_2)的关于$\mathscr{S}$的开邻域。

（6）表明，$\circ$关于$\mathscr{S}$连续。因此，$\langle Z; \circ, O_Z, \mathscr{S}\rangle$是一个BCI-拓扑代数。

Q·E·D·

利用数学归纳法容易得出下列：

定理5〔注261〕 一个BCI-拓扑代数的任意有限次乘积是BCI-拓扑代数。

Q·E·D·

我们还可以把定理4和定理5作进一步的推广，为此，我们先给出下列：

引理4〔注262〕 设$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$都是（2，0）型的代数，

$$\left.\begin{aligned} &Z = X_1 \times X_2, \\ &\circ : (x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 *_1 x_2, y_1 *_2 y_2), \\ &O_Z = (0_1, 0_2), \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

且设W_1，W_2，W_3，W_4是X中的子集，则

$$(W_1 \times W_3) \circ (W_2 \times W_4) = (W_1 *_1 W_2) \times (W_3 *_2 W_4). \tag{8}$$

证 我们计算如下：

$$\begin{aligned}
&(W_1 \times W_3) \circ (W_2 \times W_4) \\
&= \{(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) : x_1 \in W_1,\ x_2 \in W_2,\ y_1 \in W_3,\ y_2 \in W_4\} \\
&= \{(x_1 *_1 x_2,\ y_1 *_2 y_2) : x_1 \in W_1,\ x_2 \in W_2,\ y_1 \in W_3,\ y_2 \in W_4\} \\
&= (W_1 *_1 W_2) \times (W_3 *_2 W_4).
\end{aligned}$$

Q·E·D·

类似于定理 4 的证明，我们可在得到下列：

定理 6〔注263〕 任意两个BCI-拓扑代数的乘积是BCI-拓扑代数。

Q·E·D·

利用数学归纳法可得：

定理 7〔注264〕 任意有限个BCI-拓扑代数的乘积是BCI-拓扑代数。 Q·E·D·

把“BCI”-换成“BCK”定理证明仍有效，因此，我们可有下列：

定理 8〔注265〕 任意有限个BCK-拓扑代数的乘积是BCK-拓扑代数。

Q·E·D·

§2 BCI-代数的拟一致结构

众所周知，在一个集合上可赋以一个一致结构，而成为一个一致空间，并由此可以导入一致拓扑，而成为一个拓扑空间。

BCI-代数（特别地BCI-代数）的基础集是一个集合，当然也应当可赋以一致结构，在本节中，我们要给BCI-代数赋以一种较自然的一致结构。我们先从一种较弱的结构——拟一致结构谈起，再讨论一致结构的情形，最后考虑由此产生的一致拓扑。

1．拟一致结构

我们先介绍一致结构的概念。

定义1 集合X的一个一致结构是$X\times X$的一个非空子集族$\mathscr{U}$，并且它满足：

U-1．$\forall U\in\mathscr{U}$ 有$\Delta=\{(x,x):x\in X\}\subseteq U$。

U-2．如果$U\in\mathscr{U}$，则$U^{-1}=\{(y,x)\in X:(x,y)\in U\}\in\mathscr{U}$。

U-3．$\forall U\in\mathscr{U}$，$\exists V\in\mathscr{U}$，使得$V\circ V\subseteq U$。

U-4，如果$U\in\mathscr{U}$，$V\in\mathscr{U}$，则$U\cap V\in\mathscr{U}$。

U-5．如果$U\in\mathscr{U}$，$U\subseteq V\subseteq X\times X$，则$V\subseteq\mathscr{U}$。

这里，我们介绍一下在U—3中出现的记号$V\circ V$。

定义2 如果U和V是关系，则集合

$$U\circ V=\{(x,z):\exists y,(x,y)\in V,(y,z)\in U\} \tag{1}$$

称为U和V的合成。

读者容易验证下列结果：

定理1 成立下列几个等式：

1） $U\circ(V\circ W)=(U\circ V)\circ W$。 （2）

2） $(U\circ V)^{-1}=V^{-1}\circ U^{-1}$。 （3）

3） 记集合

$$U[A]=\{y:\exists x\in A,(x,y)\in U\},\ A\subseteq X。 \tag{4}$$

当$A=\{x\}$时记$U[x]=U[\{x\}]$。则对于X到Y中的任何关系U和

V，及X的任意子集A，成立：

$$U \circ V[A] = U[V(A)].\qquad (5)$$

4） （如果关系$U = U^{-1}$，称之为对称的。）如果V是对称的，那么

$$V \circ U \circ V = \cup \{V[x] \times V[y] : (x, y) \in U\}.\qquad (6)$$

（Cf. 〔10〕.） Q·E·D·

定义3 如果$\mathscr{U}$是集合X的一个一致结构，则称(X，$\mathscr{U}$)为一致空间。

例1 设X是任一非空集合，命

$$\mathscr{U} = \{A \subseteq X \times X : \triangle \subseteq A\},\qquad (7)$$

则(X，$\mathscr{U}$)是一个一致空间。

例2 设X是一切实数作成的集合。$\mathscr{U}$是X×X的一切满足下列条件的子集U作成的集合：$\exists r > 0$，使得$\{(x, y) : |x-y| < r\} \subseteq U$. 则(X，$\mathscr{U}$)是一致空间，称为实数集的通常一致空间。

我们还需要下列概念：

定义4〔注266〕 集合X的一个拟一致结构是X×X的一个非空子集族$\mathscr{U}$，满足U-1，U-3，U-4及U-5.

若$\mathscr{U}$是X的一个拟一致结构，则称(X，$\mathscr{U}$)为一个拟一致空间。

显然，一致空间必是拟一致空间，但是拟一致空间却不必是一致空间，下面我们将会看到这样的例子。关于一致空间的进一步材料读者可参看〔10，11〕。

2．BCI-拟一致结构

我们先引入下列记号：

定义5〔注267〕 设⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数，对于任意的$A \in ID(X)$，命

$$U_A=\{(x, y):x*y\in A\}。\quad (8)$$

易知，U_A是$X\times X$的子集，且有下列：

定理 2[注268] 设⟨X; ∗, 0⟩是一个BCI-代数。则对于任意的$A\in ID(X)$有

$$U_{\{0\}}\subseteq U_A\subseteq U_X=X\times X。\quad (9)$$

证 由于$A\in ID(X)$，故有

$$\{0\}\subseteq A\subseteq X。$$

由(8)知（因$\{0\}\in ID(X)$及$X\in ID(X)$）有(9)成立。

Q·E·D·

为在一个任意的BCI-代数中引入一种较为自然的拟一致结构，我们先给出下列：

引理 1[注269] 设⟨X; ∗, 0⟩是一个BCI-代数，$A\in ID(X)$，则

$$\triangle\subseteq U_A。\quad (10)$$

证 设(x, x)是△中的任一元素，其中$x\in X$。由于$x*x=0\in A$，由(8)知$(x, x)\in A$，从而$\triangle\subseteq U_A$。

Q·E·D·

引理 2[注270] 设⟨X; ∗, 0⟩是一个BCI-代数，集合$A, B\in ID(X)$，则

$$U_A\cap U_B=U_{A\cap B}。\quad (11)$$

证 由于定理Ⅱ·8·7，

$$A\in ID(X),\ B\in ID(X)\Rightarrow A\cap B\in ID(X),$$

因此(11)的右边有意义。

设$(x, y)\in U_A\cap U_B$。则

$$(x, y)\in U_A,\qquad (x, y)\in U_B。$$

因此，我们有

$$x*y\in A,\qquad x*y\in B.$$

故 $x*y\in A\cap B$。所以，$(x,\ y)\in U_{A\cap B}$。这就证得：

$$U_A\cap U_B\subseteq U_{A\cap B}.$$

现设 $(x,\ y)\in U_{A\cap B}$。则 $x*y\in A\cap B$。于是，有

$$x*y\in A,\qquad x*y\in B.$$

因此，$(x,\ y)\in U_A$，且 $(x,y)\in U_B$。所以，$(x,\ y)\in U_A\cap U_B$。这就证得：

$$U_{A\cap B}\subseteq U_A\cap U_B.$$

因此，有(11)成立。　　　　　　　　Q・E・D・

引理 3〔注271〕　设 $\langle X;\ *,\ 0\rangle$ 是一个BCI-代数，则对于任意的 $A\in ID(X)$ 有

$$U_A\circ U_A=U_A. \tag{12}$$

证　设 $(x,\ y)\in U_A$。由引理1知，

$$(x,\ x)\in U_A,\ \text{且}\ (x,\ y)\in U_A,$$

因而由定义2知，$(x,\ y)\in U_A\circ U_A$。故

$$U_A\subseteq U_A\circ U_A.$$

再设 $(x,\ z)\in U_A\circ U_A$。则 $\exists y\in X$，使

$$(x,\ y)\in U_A,\ (y,\ z)\in U_A.$$

因此有

$$x*y\in A,\qquad y*z\in A.$$

由 I－1 知，

$$(x*z)*(x*y)\leqslant y*z.$$

由于 $y*z\in A\in ID(X)$，据定理Ⅰ・8・5知，

$$(x*z)*(x*y)\in A.$$

由于 $A\in ID(X)$，且 $x*y\in A$，故 $x*z\in A$。从而

$$U_A\circ U_A\subseteq U_A.$$

这样，我们就证明了(12)。　　　　　Q·E·D·

现在，我们可以给出下列：

定理3〔注272〕　设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个BCI-代数。命

$$\mathscr{U}=\{U_A:\ A\in ID(X)\},\tag{13}$$

和

$$\mathscr{U}^*=\{U\subseteq X\times X:\ \exists U_A\in\mathscr{U},\ U_A\in U\},\tag{14}$$

其中U_A由(8)定义，则$(X,\ \mathscr{U}^*)$是一个拟一致空间。

证　先说明一个事实：$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{U}^*$。这由$\mathscr{U}$和$\mathscr{U}^*$的定义可知。

$\mathscr{U}^*$显然是$X\times X$的一个非空子集族，至少有

$$U_{\{0\}}\in\mathscr{U}\subseteq\mathscr{U}^*.$$

下面我们分别来验证拟一致结构的四个公理均成立：

1°　U-1成立。事实上，$\forall U\in\mathscr{U}^*$，$\exists U_A\in\mathscr{U}$，使$U_A\subseteq U$。由引理1知，

$$\triangle\subseteq U_A\subseteq U.$$

2°　U-3成立。事实上，$\forall U\in\mathscr{U}^*$，则$\exists U_A\in\mathscr{U}$，使$U_A\subseteq U$。由引理3知，

$$U_A\circ U_A=U_A\subseteq U.$$

而且$U_A\in\mathscr{U}\subseteq\mathscr{U}^*$。

3°　U-4成立。事实上，如果$U,\ V\in\mathscr{U}^*$，如存在$U_A\in\mathscr{U}$，$U_B\in\mathscr{U}$，使

$$U_A\subseteq U,\ U_B\subseteq V.$$

由引理2知，

$$U_{A\cap B}=U_A\cap U_B\subseteq U\cap V.$$

由于$U_{A\cap B}\in\mathscr{U}$，故$U\cap V\in\mathscr{U}^*$。

4°　U-5成立。事实上，如果$U\in\mathscr{U}^*$，而$U\subseteq V\subseteq X\times X$，那

么，$\exists U_A\in\mathscr{U}$，使

$$U_A\subseteq U\subseteq V,$$

从而$V\in\mathscr{U}^*$.

这样，$(X, \mathscr{U}^*)$是一个拟一致空间。　　Q·E·D·

由定理3，我们可以引入下列概念：

定义6[注273]　定理3中给出的拟一致空间$(X, \mathscr{U}^*)$称为由BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$诱导的拟一致空间，简称为BCI-拟一致空间；由(14)表示的集族$\mathscr{U}^*$称为由BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$诱导的拟一致结构，简称为BCI-拟一致结构。

下面我们给出BCI-拟一致结构的一个特征性质，即

定理4[注274]　设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，$\mathscr{U}^*\subseteq P(X\times X)$。则下列条件等价：

1)　$\mathscr{U}^*$是BCI-拟一致结构；

2)　命$E=\{(x, y)\in X\times X: x*y=0\}$,

$$F=X\times X-E,$$

则

$$\mathscr{U}^*=\{E\cup T: T\in P(F)\}. \tag{15}$$

证　1)⇒2)。

事实上，由于$A=\{0\}\in ID(X)$，故$U_A=U_{\{0\}}\in\mathscr{U}=\{U_B: B\in ID(X)\}$。而实际上有

$$U_A=U_{\{0\}}=E,$$

故$E\in\mathscr{U}^*$。由于$\forall T\in P(F)$，$E\subseteq E\cup T$。由U-5知，$E\cup T\in\mathscr{U}^*$。因此$\mathscr{U}^*\supseteq\{E\cup T; T\in P(F)\}$。

反之，若$U\in\mathscr{U}^*$，则$\exists U_A\in\mathscr{U}$，使得$U_A\subseteq U$。由于$A\in ID(X)$，故$0\in A$。从而$U_{\{0\}}\subseteq U_A$，因此$E\subseteq U$。这样我们有$U-E\in F$。因此，$U\in\{E\cup T; T\in P(F)\}$。所以$\mathscr{U}^*\subseteq\{E\cup T: T\in P(F)\}$。

这就证得了(15)。

2)⇒1)。

设集族$\mathscr{U}^*$由(15)表示。设

$$M\equiv\{U\subseteq X\times X: \exists U_A\in\mathscr{U},\ U_A\subseteq U\},$$

其中

$$\mathscr{U}=\{U_A: A\in ID(X)\}.$$

我们往证 $\mathscr{U}^*=M$。

事实上，设$U\in M$，则$\exists U_A\in\mathscr{U}$，使$U_A\subseteq U$。由于

$$E=U_{\{O\}},\ O\in A\in ID(X),$$

则$E\subseteq U_A\subseteq U$。故$U\in\mathscr{U}^*$。因此$M\subseteq\mathscr{U}^*$。

反之，设$U\in\mathscr{U}^*$，于是$\exists T\in P(F)$，使$U=E\cup T$。因此，

$$U_{\{O\}}=E\subseteq U.$$

由M的定义，$U\in M$。所以，$\mathscr{U}^*\subseteq M$。

这样我们有$\mathscr{U}^*=M$。由定理 3 知，$\mathscr{U}^*$是BCI-拟一致结构。

Q·E·D·

注 1(注275)　对于BCK-代数类似于定理 3 和定理 4 的结果也成立，也可类似于定义 6 作出相应的定义。我们在这里就不一一详述了。应当注意的是，对于BCK-代数来说，我们在这里所作的讨论比K·Iséki 在〔52〕中所作的讨论要规范一些。

例 3　设$X=\{0,\ 1,\ 2\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数。

显然，我们有

$$E=\{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2)\}.$$

而X的BCI-拟一致结构$\mathscr{U}^*$由下列集合组成：

$$E\cup T,\ T\in P(F)=P\{(0, 2), (1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 1)\}.$$

因此，$\mathscr{U}^*$共由$2^5=32$个集合组成。

3．成为一致结构的情形

我们从例3可以看到这样的一个事实：

$$E=\{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2)\}\in\mathscr{U}^*,$$

但是，

$$E^{-1}=\{(0,0), (1, 0), (1, 1), (2, 2)\}\bar{\in}\mathscr{U}^*.$$

因此，例3中的集族$\mathscr{U}^*$并不满足U－2，即$\langle X; *, 0\rangle$的拟一致结构$\mathscr{U}^*$并不是一致结构。这说明了，一个BCI-拟一致结构不必是一致结构。因此，我们应当进一步讨论这样的问题：一个BCI-拟一致结构能否成为一个一致结构？需要什么条件才能成为一个一致结构呢？在这一部分中我们来讨论这些问题。我们有下列结果：

定理5〔注276〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，$\mathscr{U}^*$是它的BCI-拟一致结构．则下列条件是等价的：

1） $\mathscr{U}^*$是一致结构，

2） $U_{\{0\}}=\triangle$，

3） $\langle X; *, 0\rangle$是广义结合的。

证 1）⇒2）。设$\mathscr{U}^*$是一致结构．显然，$\triangle\subseteq U_{\{0\}}$。现设$(x, y)\in U_{\{0\}}$。则$x*y=0$。由于$\mathscr{U}^*$是一致结构，故

$$U_{\{0\}}^{-1}=\left\{(y, x):(x,y)\in U_{\{0\}}\right\}\in\mathscr{U}^*.$$

由于$\{0\}$是X中按"$\subseteq$"最小的理想，故$U_{\{0\}}^{-1}\supseteq U_{\{0\}}$。于是，按$U_{\{0\}}^{-1}$的定义可知$U_{\{0\}}^{-1}=U_{\{0\}}$。因此，$y*x=0$。由Ⅰ-4知，$x=y$。所以，$U_{\{0\}}\subseteq\triangle$。这就证得了$U_{\{0\}}=\triangle$。

2)⇒1)。由于$U_{\{0\}}=\triangle$，故$\forall U\in\mathscr{U}^*$，则$\triangle\subseteq U$。因此，$\triangle\subseteq U^{-1}$，即$U_{\{0\}}\subseteq U^{-1}$。由定理4知，$U^{-1}\in\mathscr{U}^*$。所以，$\mathscr{U}^*$是一致结构。

2)⇒3)。设$x\in B(X)$，则$0*x=0$。故$(0, x)\in U_{\{0\}}$。由于$U_{\{0\}}=\triangle$，故$x=0$。因此，$B(X)=\{0\}$。所以，$\langle X;*, 0\rangle$是广义结合的。

3)⇒2)。显然，$\triangle\subseteq U_{\{0\}}$。现设$(x, y)\in U_{\{0\}}$，即$x*y=0$。由于$\langle X; *, 0\rangle$是广义结合的，故有：

$$\begin{aligned}x&=0*(0*x)=(y*y)*(0*x)\\&=(y*(0*x))*y=(x*(0*y))*y\\&=(x*y)*(0*y)=0*(0*y)=y,\end{aligned}$$

故$(x, y)=(x, x)\in\triangle$。从而，$U_{\{0\}}\subseteq\triangle$。这就证明了

$U_{\{0\}}=\triangle$。　　　　Q·E·D·

注2　定理5的1)给出了广义结合BCI-代数的一致结构特征，而2)则给出了广义结合BCI-代数的零理想特征。我们还可把2)改一个说法，而利用"2)⟺3)"得到下列：

推论1〔注277〕　设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数。则X是广义结合的当且仅当

$$x*y=0\Longleftrightarrow x=y. \tag{16}$$

Q·E·D·

注 3　条件(16)实际上表明，在⟨X；∗，0⟩的乘法表中仅仅对角线上的元素为0。推论1给出的BCI-代数是广义结合的一个较简单的判定方法。

注 4　由于结合BCI-代数一定是广义结合的，故有下列：

推论 2〔注278〕　任意的结合BCI-代数的BCK-拟一致结构一定是它的一致结构，且$U_{\{0\}}=\triangle$。

Q・E・D・

这个推论也可利用定理Ⅴ.2.8而直接予以证明。

注 5　由于任意的BCK-代数必是BCI-代数，由定理5可知，有下列：

推论 3〔注279〕　设⟨X；∗，0⟩是一个BCK-代数。则它的BCI-(或BCK-)拟一致结构$\mathscr{U}$是一致结构的充要条件是⟨X；∗，0⟩是平凡的，即X＝{0}。　　Q・E・D・

这样，在BCK-代数理论中只能讨论上面所引入的这样拟一致结构，而没有必要去研究这种拟一致结构成为一致结论的问题。这样，我们就可以理解K. Iséki在〔52〕中为什么只讨论了BCK-代数的拟一致结构的问题。另一方面，这也说明了，"BCI-拟一致结构成为一致结构"的这个类性质是BCI-代数理论中所固有的。不过，定理5表明，这一性质与广义结合性是等价的；因此，不可能有什么新的代数类出现。但是，这一性质毕竟是用一致结构刻划的，从而比之完全代数的讨论要深入一点了。

为了方便起见，我们在这里引入下列概念：

定义 7　〔注280〕设⟨X；∗，0⟩是一个BCI-代数。如果X的BCI-拟一致结构$\mathscr{U}^*$是它的一致结构，则称它为BCI-一致结构。而(X，$\mathscr{U}^*$)则称之为BCI-一致空间。

由定理5可知成立下列：

定理 6 〔注281〕设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，$\mathscr{U}^*$是BCI-拟一致结构，则$(X, \mathscr{U}^*)$是BCI-一致空间$\Longleftrightarrow\langle X; *, 0\rangle$是广义结合的。 Q·E·D·

例 4 设 X 是任一非空集合，则$\langle P(X); \triangle, \varnothing\rangle$是一个结合的BCI-代数，其中△表示对称差运算。由定理5的推论2知，X的BCI-一致结构$\mathscr{U}$是由$X\times X$的包含$U_{\{0\}}$的一切子集所组成，而$\mathscr{U}_{\{0\}}$正是$X\times X$的对角线

$$U_{\{0\}}=\{(x, x)\in X\times X: x\in X\}.$$

4 BCI-一致拓扑

对于BCI-一致空间，自然可以由它的一致结构而诱导它的一致拓扑。那么它的一致拓扑是什么呢？在这一部分中我们来讨论这一问题。为了方便起见，我们先列出一致拓扑的概念，即下列：

定义 8 若$(X, \mathscr{U})$为一致空间，则一致拓扑$\mathscr{T}$是指所有满足下列条件的X的子集T所构成的集族：对T中每一个x有$\mathscr{U}$中一个元U满足$U[x]\subseteq T$，其中$\mathscr{U}$是X的一致结构。

根据这一定义，我们可以有下列结果：

定理 7 〔注282〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，$\mathscr{U}^*$是它的BCI-一致结构，则由$\mathscr{U}^*$诱导的一致拓扑是散拓扑。

证 设$\mathscr{T}$是一致拓扑。S是X的任一子集，若$S=\varnothing$，则$S\in\mathscr{T}$。现设$S\neq\varnothing$、$\forall x\in S$，那么取$U_{\{0\}}\in\mathscr{U}^*$，由定理5知，

$$\begin{aligned} y\in U_{\{0\}}[x] &\Longleftrightarrow (x, y)\in U_{\{0\}} \\ &\Longleftrightarrow (x, y)\in\triangle \\ &\Longleftrightarrow x=y. \end{aligned}$$

故$U_{\{0\}}[x]=\{x\}\subseteq S$。由一致拓扑的定义，$S\in\mathscr{T}$。这样，$\mathscr{T}=P(X)$。所以，$\mathscr{T}$是散拓扑。 Q·E·D·

由此有下列：

推论〔注283〕 结合BCI-代数〈X；$*$，0〉的BCI-一致结构诱导的一致拓扑是散拓扑。

Q·E·D·

为了方便起见，我们引入下列：

定义 9〔注284〕 设〈X；$*$，0〉是一个BCI-代数，$\mathscr{U}^*$是它的BCI-一致结构，$\mathscr{T}$为由一致结构$\mathscr{U}^*$引入的一致拓扑（散拓扑），则称$\mathscr{T}$为BCI-一致拓扑，且称(X，$\mathscr{T}$)为BCI-一致拓扑空间。

现在，我们来进一步讨论一下这种具有BCI-一致拓扑结构的BCI-代数。为此，我们先介绍几个有关的概念。

定义10〔注285〕 设〈X；$*$，0〉是一个BCI-代数，(X，$\mathscr{T}$是一个拓扑空间。称〈X；$*$，0〉为具有拓扑$\mathscr{T}$的BCI-代数。

定义11〔注286〕 设〈X；$*$，0〉是具有拓扑$\mathscr{T}$的BCI-代数.则称〈X×X；$*$，0〉为具有积拓扑$\mathscr{S}$的积代数，其中$\mathscr{S}$是(X，J)与(X，$\mathscr{T}$)的积空间的拓扑。

我们有下列结果：

定理 8〔注287〕 设〈X；$*$，0〉是一个广义结合的BCI-代数，$\mathscr{T}$是X的BCI-一致拓扑，则〈X；$*$，0，$\mathscr{T}$〉是一个广义结合的BCI-拓扑代数。

证 由定理7知，$\mathscr{T}$是散拓扑，从而积拓扑$\mathscr{S}$也是散拓扑。因此，$*$必是从($X\times X$，$\mathscr{S}$)到(X，$\mathscr{T}$)的一个连续映射。所以，〈X；$*$，0，$\mathscr{T}$〉是一个广义结合的BCI-拓扑代数。

Q·E·D·

这个定理有下列显然的：

推论〔注288〕 设$\mathscr{T}$是结合BCI-代数〈X；$*$，0〉的BCI-一

致拓扑，则⟨X；$*$，0，$\mathscr{T}$⟩是一个结合的BCI–拓扑代数。

Q・E・D・

由此易知成立下列：

定理 9〔注289〕 设$\mathscr{T}$是结合BCI–代数⟨X；$*$，0⟩的BCI–一致拓扑，则(X，$*$，$\mathscr{T}$)是以0为恒等元的对合拓扑群。

Q・E・D・

5．具有散子代数性质的BCI–代数的拟一致结构

最后，我们来考察一下具有散子代数性质的BCI–代数的拟一致结构。设⟨X；$*$，0⟩是一个具有散子代数性质的BCI–代数，则

$$X = B(X) \cup L(X), \tag{17}$$

这里，⟨B(X)；$*$，0⟩是一个BCK–代数，而⟨L(X)；$*$，0⟩是一个广义结合的BCI–代数。在X中二元运算$*$实际上是如下地给出的：

$$x*y=\begin{cases} x*y, & x\in B(X),\ y\in B(X) \\ x*y, & x\in L(X), y\in L(X), \\ 0*y, & x\in B(X),\ y\in L(X),\ y\neq 0, \\ x, & x\in B(X),\ y\in L(X),\ y=0, \\ x, & x\in L(X),\ y\in B(X). \end{cases} \tag{18}$$

我们来看一下它的BCI–拟一致结构$\mathscr{U}^*$。集合

$$\mathrm{E}=\{(x,\ y)\in X\times X;\quad x*y=0\}$$

有哪些元素组成呢？我们分以下几种情况讨论：

1) 当$x\in \mathrm{B(X)}$，$y\in \mathrm{B(X)}$，如果$(x,\ y)\in \mathrm{E}$，那么$x*y=0$。如果我们命

$$E_{B(X)} = E\cap (B(X)\times B(X)), \tag{19}$$

那么此时$(x, y)\in E_{B(X)}$。当然，反之亦真。

2） 当$x\in L(X)$，$y\in L(X)$，则因$\langle L(X); *, 0\rangle$是一个广义结合BCI-代数，而有

$$(x, y)\in E \Longleftrightarrow x*y=0 \Longleftrightarrow x=y.$$

故若命 $$E_{L(X)}=E\cap(L(X)\times L(X)), \tag{20}$$

那么，$E_{L(X)}=\{(x, x): x\in L(X)\}=\triangle\cap(L(X)\times L(X))$。

3） 当$x\in B(X)$，$y\in L(X)$，$y\neq 0$时，由(18)易知$x*y=0*y\neq 0$。故$(x, y)\overline{\in}E$。

4） 当$x\in B(X)$，$y\in L(X)$，$y=0$时，由(18)易知

$$x*y=x.$$

故此时：$(x, y)\in E \Longleftrightarrow x=0$；亦即$(0, 0)\in E$。这已包括在1)中或2)中。

5） 当$x\in L(X)$，$y\in B(X)$时，亦有

$$x*y=x.$$

因此，此时$(x, y)\in E \Longleftrightarrow x=0$。这也已包括在2)中。

这样，我们可以看出，对于一个具有散子代数性质的BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$来说，

$$E=E_{B(X)}\cup E_{L(X)}, \tag{21}$$

且

$$E_{B(X)}\cap E_{L(X)}=\{(0,0)\}. \tag{22}$$

于是，由定理4我们可知，

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{U}^*=\{E\cup T: T\in P(F)\},\\ \text{而}\quad &F=X\times X-E=X\times X-(E_{B(X)}\cup E_{L(X)}).\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

我们再进一步来分析，实际上，如果用$\mathscr{U}^*_{B(X)}$和$\mathscr{U}^*_{L(X)}$分别表示$\langle B(X); *, 0\rangle$和$\langle L(X); *, 0\rangle$的BCI-拟一致结构，

则

$$
\left.\begin{aligned}
\mathscr{U}^*_{B(X)} &= \mathscr{U}^* \cap P(B)X) \times B(X)), \\
\mathscr{U}^*_{L(X)} &= \mathscr{U}^* \cap P(L(X) \times L(X)).
\end{aligned}\right\} \qquad (24)
$$

总结上面的讨论，我们可以得到下列结果：

定理10〔注290〕 设〈X；＊，0〉是一个具有散子代数性质的BCI-代数，则

1） 它的BCI-拟一致结构$\mathscr{U}^*$由（23）给出，其中$E_{B(X)}$及$E_{L(X)}$由（19）和（20）定义

2） 〈B(x)；＊，0〉和〈L(x)；＊，0〉的BCI-拟一致结构$\mathscr{U}^*_{B(X)}$和$\mathscr{U}^*_{L(X)}$由（24）给出。

3） $\mathscr{U}^*$是〈X；＊，0〉的一致结构$\Longleftrightarrow$B(X)＝{0}。

Q·E·D·

第七章 BCH-代数

由作者引入的BCH-代数是比BCI-代数更为广泛的一类(2,0)型的抽象代数。我们在这一章中作些简单介绍。

§1 BCH-代数的概念

在这一节中我们介绍一下BCH-代数理论产生和发展的概况，给出BCH-代数的定义和有关的概念，尤其要解决真BCH-代数的存在性，从而表明BCH-代数理论是一种独立的代数理论。

1. BCH-代数理论产生和发展的概况

1980年，作者开始研究BCI-代数理论。当时，作者的研究成果的一部分，就是和K·Iséki一起讨论和研究了结合的BCI-代数，并在[27]和[28]中发表了它们，在那时，作者还得到了一部分成果，由于某些原因当时没有发表，其中有一个结果是定理Ⅱ.2.8.

这个定理说，BCI-代数的一个特征是它满足Ⅰ-1，Ⅰ-3，Ⅰ-4和

$$(x*y)*z=(x*z)*y. \qquad (1)$$

这是用四个条件取代BCI-代数的五个公理。当时搞这一项工作的动机是：第一，嫌BCI-代数的五条公理太烦；第二，想探索一个新的代数公理体系。要把BCI-代数类包含在其中，而尽量

不要公理Ⅰ-1。这一探索在得到了定理Ⅱ.2.8之后获得了成功，达到了预期的目的。首先，我们可用Ⅰ-1，Ⅰ-3，Ⅰ-4和(1)四个条件等价地取代BCI-代数的定义；其次，我们以Ⅰ-3，Ⅰ-4和(1)作为三条公理而建立一个代数系，作者称之为BCH-代数，自然是包含BCI-代数的。

1981年，作者把自己建立BCH-代数的想法告诉了K·Iséki，他回信表示支持，并要作者尽快整理出来。

1982年，作者写出了〔37〕，并译成英文寄给K·Iséki。他回信表示同意在日本发表它。

1983年4月，在西安召开的全国第一次BCK和BCI-代数会议上作者宣读了《结合的BCI-代数的一些结果》一文，其中第三个问题就是介绍了BCH-代数。

这里应当指出的一点是，一直到1983年4月作者还没有能找出一个BCH-代数，而不是BCI-代数的，即真BCH-代数。这里要谈一下作者和李新同志的合作。我们的合作是从1982年11月开始的。在一次偶然的机会中，作者向李新同志介绍了BCH-代数和BCI-代数。经过半年的努力，我们终于找出了真BCH-代数。并且进一步从理论上进行了初步的研究，这就产生了〔38〕。这篇文章写于1983年5月。

作者在编写这本讲义时，对已有的关于BCH-代数的成果作初步整理，这就是本章的基本内容，应当说，BCH-代数还正在发展之中。

2．BCH-代数的定义

我们有下列：

定义1〔注291〕 一个BCH-代数是具有下列条件的(2，0)型的一个代数⟨X；$*$，0⟩：对于任意的x，y，$z\in X$，成立下

列公理：

公理 H-1． $x*x=0$， (2)

公理 H-2． $x*y=y*x=0\Rightarrow x=y$， (3)

公理 H-3． $(x*y)*z=(x*z)*y$． (4)

集合X被称之为BCH-代数〈X；*， 0〉的基础集合。

显然，我们有下列结果：

定理 1〔注292〕

1）任一BCK-代数是一个BCH-代数．

2） 任一BCI-代数是一个BCH-代数。

3） 一个BCH-代数〈X；*， 0〉如果满足：对于任意的x，y，$z\in X$成立

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)=0, \quad (5)$$

则它是一个BCI-代数。

证 由定理Ⅱ·2·8 知． Q·E·D·

3．真BCH-代数的存在。

由定理 1 及第三章的结果知，我们有下列包含：

BCK-代数⊂BCI-代数类⊆BCH-代数类。 (6)

这里自然要提出下列：

问题 1〔注293〕 是否存在一个BCH-代数，它不是BCI-代数？

为了方便起见，我们给出下列：

定义 2〔注294〕 如果一个BCH-代数，它不是BCI-代数，那么称之为真BCH-代数。

这样，问题 1 就转变为下列：

问题 2〔注295〕 是否存在一个真BCH-代数？

这里谈一下解决这个问题的必要性。我们只有找出一个真BCH-代数的例子，才能保证BCH-代数理论是独立的代数系统。

否则，人们就要怀疑，BCH-代数是否就是BCI-代数。另一方面，我们以后将要看到，一个真BCH-代数的存在也表明了在BCI-代数的五个公理中，I—1是独立于其它四个公理的。

我们给问题2一个肯定回答，即有下列：

定理2〔注296〕 存在真BCH-代数。

证 见下面的例1和例2。

Q・E・D・

例1 设X＝{0，1，2，3}X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	3	3
2	2	0	0	2
3	3	0	0	0，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCH-代数。事实上，容易验证，$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCH-代数，而

$$((2*3)*(2*1))*(1*3)=(2*0)*3$$
$$=2*3=2\neq 0,$$

故公理I-1不满足，因此$\langle X; *, 0\rangle$不是一个BCI-代数，即$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCH-代数。

例2 设X＝{0，1，2，3}，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	3	0	3
3	3	0	0	0，

则⟨X; ∗, 0⟩是一个真BCH-代数。事实上，容易验证⟨X; ∗, 0⟩是一个BCH-代数，而

$$((1*3)*(1*2))*(2*3)=(1*0)*3$$
$$=1*3=1\neq 0,$$

故不满足公理 I-1，因此⟨X; ∗, 0⟩不是一个BCI-代数。

4．几点说明

在本节的最后作者作几点说明：

注1 由于定理Ⅱ·1·3的1)，2)，我们有下列：

定理3〔注297〕 一切BCH-代数作成一个真类，以后称之为BCH-代数类。BCK-代数类和BCI-代数类都是BCH-代数类的真子类。

Q·E·D·

注2 （2，0）型的代数不必都是BCH-代数。可见下列：

例3 设X={0，1，2}，X中的二元运算∗由下表给出：

∗	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	0

则（2，0）型代数⟨X; ∗, 0⟩不是BCH-代数。因 $1*1=1\neq 0$，故不满足H-1。

存在满足H-1，但不满足H-2的（2，0）型代数。如下例：

例4 设X={0，1，2}，X中的二元运算∗由下表给出：

*	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	1
2	2	1	0

，

则（2，0）型代数⟨X；*，0⟩不是BCH-代数，虽满足H-1但不满足H-2，因 $0*1=1*0=0$，但 $0\neq1$，因 $0*2=2$，而 $1*2=1$。

存在满足H-1，H-2，但不满足H-3的（2，0）型代数。如下例：

例5 设X＝{0，1，2}，X中的二元运算*由下表给出：

*	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	1
2	2	1	0

，

则（2，0）型代数⟨X；*，0⟩满足H-1，H-2，但不满足H-3。因

$$(1*2)*1=1*1=0,$$

$$(1*1)*2=0*2=2.$$

注3 上面几个例子还不足以说明BCH-代数的公理体系的三个公理是互不蕴涵的。我们自然要提出下列：

问题1〔注298〕 公理H-1，H-2及H-3是互不蕴涵的吗？

建议有兴趣的读者去认真考虑这个问题。

注4 真BCH-代数的个数问题有什么结果呢？这是一个值得

研究的问题，我们以后将给出一些结果。

注 5　由定义 1 可知，一切BCH-代数的类是一个亚簇。

§2　BCH-代数的性质

在这一节中，我们来介绍一下BCH-代数的一些主要性质。

首先，我们来考虑一个问题。在§1中我们给出的两个真BCH-代数都是破坏公理 I-1 的。这是不是偶然的呢？不是的。我们再返回来看一下定理Ⅱ·2·8及其证明。不难看出，在充分性的证明中，我们由

$$\left.\begin{matrix} H-3 \\ H-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow I-2,$$

$$\left.\begin{matrix} H-3 \\ H-1 \\ H-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow I-5.$$

这两个过程的证明中并没有用到公理 I-1。因此，我们有下列：

定理 1〔注299〕　设〈X；$*$，0〉是一个任意的BCH-代数，则对于任意的 x，$y\in X$ 有

$$(x*(x*y))*y=0, \tag{1}$$

及

$$x*0=0\Rightarrow x=0. \qquad \text{Q·E·D·} \tag{2}$$

由此，我们可以得到真BCH-代数的下列特征：

定理 2〔注300〕　一个BCH-代数〈X；$*$，0〉是真BCH-的充要条件是不满足公理 I-1。

证　“⇒”。如果〈X；$*$，0〉满足 I—1，由于定理 1 它

又满足Ⅰ-2 和Ⅰ-5，故它是一个BCI-代数。这与它是一个真BCH-代数的条件矛盾。

"⇐"。由于⟨X；∗，0⟩不满足Ⅰ-1，因而不是BCI-代数，所以它是真BCH-的。 Q·E·D·

这个结果就给前面问题一个确切的回答。另一方面，例Ⅶ.1·1 和例Ⅶ·1·2 也说明了

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ⅰ-2} \\ \text{Ⅰ-3} \\ \text{Ⅰ-4} \\ \text{Ⅰ-5} \\ \text{（甚至加上H-3）} \end{array}\right\} \nRightarrow \text{Ⅰ-1}.$$

这就可以得出：

定理 3〔注301〕 在BCI-代数的公理系中公理Ⅰ-2，Ⅰ-3，Ⅰ-4，Ⅰ—5 并不蕴涵Ⅰ—1。 Q·E·D·

不过，我们还需要提出下列：

问题 4〔注302〕 BCI-代数定义中五个公理彼此蕴涵吗？

下面，我们继续来看BCH-代数的性质。由定理 1 我们不难得到BCH-代数的下列重要性质：

定理 5〔注303〕 在任意的BCH-代数⟨X；∗，0⟩中对于任意的 $x\in X$ 有

$$x*0=x. \tag{3}$$

证 首先，由公理H-3 和H-1 有：

$$(x*0)*x=(x*x)*0=0*0=0.$$

下面，我们想证 $x*(x*0)=0$，从而由 H-2 便有(3)。我们来证这个事实。实际上，只要计算一下：

$$(x*(x*0))*0=0,$$

这是由于定理1中的（1）。再由（2）知，$x*(x*0)=0$。

Q・E・D・

这里还应说明一件事。由于定理1的（2）成立，我们可以作如下定义：

定义1〔注304〕 设〈X；$*$，0〉是一个BCH-代数，命

$$x\leqslant y \quad \text{iff} \quad x*y=0.$$

由这个定义我们有下列：

定理6〔注305〕 在BCH-代数〈X；$*$，0〉中对于任意的$x,y\in X$成立：

1） $x*(x*y)\leqslant y$, （5）

2） $x\leqslant x$, （6）

3） $x\leqslant y,\ y\leqslant x\Rightarrow x=y$, （7）

4） $x\leqslant 0\Rightarrow x=0$. Q．E．D． （8）

但是，与BCK-代数、BCI-代数不同，在BCH-代数中竟无法证明其是否按$\leqslant$为一个半序集。其次，定理5给出的

$$x*0=x \quad (3)$$

这一性质是BCK-代数．BCI-代数和BCH-代数所共有的，这是由于

$$\left.\begin{array}{l}H-1\\H-2\\H-3\end{array}\right\}\Rightarrow (3),$$

而BCK-代数．BCI-代数也都满足H-1，H-2和H-3。

BCH-代数还有下列性质：

定理7〔注306〕 设〈X；$*$，0〉是一个BCH-代数，则对于任意的x，$y\in X$有

$$(x*y)*x=0*y, \quad (9)$$

特别地有

$$(0*y)*0=0*y, \tag{10}$$

及

$$(x*0)*x=0. \tag{11}$$

证 因

$$(x*y)*x=(x*x)*y=0*y.$$

在（9）中命 $x=0$ 便得出（10）。在（9）中命 $y=0$，便有：$(x*0)*x=0*0=0$.（在定理5的证明中也已得到(11).）

Q·E·D·

BCH-代数有下列特征：

定理8[注307] 一个(2, 0)型的代数$\langle X;*,0\rangle$是BCH的当且仅当它满足H-1，H-2及

$$((x*y)*z)*((x*z)*y)=0, \quad \forall x, y, z\in X. \tag{12}$$

证 “⇒”。只要证（12）。事实上，

$$((x*y)*z)*((x*z)*y)=((x*y)*z)*((x*y)*z)=0.$$

“⇐”。只要证H-3。据H-2，为证H-3，只要证

$$((x*y)*z)*((x*z)*y)=0$$

及

$$((x*z)*y)*((x*y)*z)=0.$$

而此二式皆由（12）保证。 Q·E·D·

§3 BCH-代数的BCI-化

类似于BCI-代数的BCK-化，自然应当提出一个BCH-代数的BCI-化的概念。

1．BCI-化的概念

定义 1〔注308〕 如果一个BCH-代数具有一定的条件而可证明它是一个BCI-代数，则称这个BCH-代数可BCI-化，或简称可BCI-化．一个叙述BCH-代数可BCI-化的命题被称为BCI-化定理。

作为一个例子，一个显然的BCI-化定理是下列：

定理 1〔注309〕 一个BCH-代数是一个BCI-代数的充要条件是它满足I—1。

2．几个BCI-化定理

除了定理1这个平凡的BCI-化定理外，我们再给出几个BCI-化定理。

定理 2〔注310〕 一个BCH-代数〈X；∗，0〉若具有结合性，即在于任意的x，y，$z\in X$有

$$(x*y)*z=x*(y*z), \tag{1}$$

则〈X；∗，0〉是结合的BCI-代数，因而（X，∗）是一个每个元素皆为对合的一个群。

证 只要证满足公理I-1。事实上，对于任意的x，y，$z\in X$，

$$\begin{aligned}((x*y)*(x*z))*(z*y)&=((x*y)*x)*((z*z)*y)\\&=((x*x)*y)*((z*z)*y)\\&=(0*y)*(0*y)\\&=0.\end{aligned}$$

故I-1被满足。由定理1，〈X；∗，0〉是一个BCI-代数，由于结合律（1）成立，故它是结合的BCI-代数，由定理V．2．5，（X，∗）是一个对合群。 Q·E·D·

定理 3〔注311〕 一个BCH-代数〈X；∗，0〉若运算∗具有

交换律，即对于任意的x，$y\in X$，有

$$x*y=y*x, \tag{2}$$

则〈X；$*$，0〉是一个结合的BCI-代数。

证 我们要由（2）$\Longrightarrow$（1）。事实上，

$$\begin{aligned}(x*y)*z&=(y*x)*z\\&=(y*z)*x\\&=x*(y*z),\end{aligned}$$

这就得到了（1），再由定理2便得证本定理。 Q·E·D·

定理4[注312] 一个BCH-代数〈X；$*$，0〉若具有下列性质：对于任何的$x\in X$有

$$0*x=x。 \tag{3}$$

则〈X；$*$，0〉是一个结合的BCI-代数。

证 我们要由（3）$\Longrightarrow$（2），再利用定理3便得证了。事实上。可以计算出下列：

$$x*y=(0*x)*y=(0*y)*x=y*x。 \quad Q\cdot E\cdot D\cdot$$

注1 实际上，定理2就是定理Ⅴ.3.1的必要性部分。这里的定理3和定理4实际上给出了结合BCI—代数的新的特征性质，即有下列：

定理5[注313] 一个（2，0）型的代数〈X；$*$，0〉是一个结合BCI-代数的充要条件是它满足H-1，H-2，H-3及（2），或等价地，它满足H-1，H-2，H-3及（3）。

Q·E·D·

注2 由于定理2，3和4，我们在BCH-代数中没有必要再讨论结合性，或性质（3）及（4）。从这里也可进一步看出，结合性是BCI-代数所固有的一种性质。

注3 在BCI—代数中结合性与（2），（3）都是等价的，

这一点在BCH—代数中也是成立的，即有下列：

定理 6[注314]　设〈X；∗，0〉是一个BCH-代数。则下列条件等价：

1）X是结合的，即满足（1），

2）X关于运算∗是交换的，即满足（2），

3）X中定义一个算子：（与定义Ⅱ．4．2一致）

$$\left.\begin{array}{l} H_0: X \to X, \\ X \longmapsto 0 * x, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

则X中的每个元素皆是算子H_0的不动点：$H_0(x)=x$，$\forall x \in X$，亦即满足（3）。

证　在定理4和定理3中我们已证过

$$(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)。$$

现设BCH-代数〈X；∗，0〉中（1）满足，从而它是结合的BCI-代数，故满足（3）。Q．E．D．

下面我们再给出两个BCI-化定理。

定理 7[注315]　设〈X；∗，0〉是一个BCH-代数，且满足下列条件：对于任意的u，$v \in X$，成立

$$u*(u*v)=v, \qquad (5)$$

则〈x，∗，0〉是一个BCI-代数。

证　设x，y，z是X中的任意三个元素，由H-3可得：

$$\begin{aligned} &((x*y)*(x*z))*(z*y) \\ &=((x*(x*z))*y)*(z*y) \\ &=((x*(x*z))*(z*y))*y \\ &=(z*(z*y))*y \\ &=0。 \end{aligned}$$

这里用到了（5）和定理Ⅶ.2.1的（1），这样BCH-代数⟨X；$*$，0⟩满足I-1，因此它是一个BCI-代数。 Q. E. D.

定理8〔注316〕 设⟨X；$*$，0⟩是一个BCI-代数，且满足下列条件：对于任意的u，V成立

$$v*(u*(u*v))=0, \quad (6)$$

则⟨X；$*$，0⟩是一个BCI-代数。

证 因为（6）成立，且因为定理Ⅶ.2.1的（1），有

$$(u*(u*v))*v=0,$$

由H-2有

$$u*(u*v)=v,$$

即有（5）成立，从而由定理7可知，⟨X；$*$,0⟩是一个BCI-代数。 Q·E·D·

3.BCH-代数的BCK-化

BCH-代数在一定的条件下可成为一个BCK-代数，而不必非要成为一个真BCI-代数。因此我们要引入下列：

定义2〔注317〕 **如果一个BCH-代数具有一定的条件而可证明它是一个BCK-代数，则称这个BCH-代数可BCK-化，或简称可直接BCK-化。一个叙述BCH-代数可BCK-化的命题被称为直接BCK-化定理。**

一个平凡的直接BCK-化定理是BCH-代数满足I-1和“$\forall x \in X$，$0\leqslant x$”。把本节中的BCI-化条件结合起来可产生许多直接BCK-化定理。这里不一一赘述了。要注意的是，仅仅“$\forall x\in X$，$0\leqslant x$”这个条件是不足以保证一个BCH-代数成为BCK-代数，如例Ⅶ.1.1中的真BCH-代数就满足这一条件，然而并不是一个BCI-代数。

§ 4 BCH-代数的BCI-部分

对于一个BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$来说，一定存在一个包含在其中的最大的子集$B(X)$，使$\langle B(X); *, 0\rangle$是一个BCK-代数。$B(X)$的构造为

$$B(X)=\{x\in X: 0\leqslant x\}. \tag{1}$$

而且我们已经知道

$$\{0\}\subseteq B(X)\subseteq X. \tag{2}$$

当$B(X)=X$时，$\langle X; *, 0\rangle$是BCK-代数；当$B(X)=\{0\}$时，$\langle X; *, 0\rangle$是一个广义结合的BCI-代数。所以，对于BCI-代数的BCK-部分我们已经有了较清楚的认识。

现在，我们要对BCH-代数引入它的BCI-部分的概念，且对它的一些性质作一些初步的讨论。

1. 概念

定义1[注318] 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCH-代数。如果：

1）$\exists A\subseteq X$，$0\in A$，

2）$\langle A; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，

3）没有$B\subseteq X$，使$A\subset B$，且$\langle B; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，那么称A为$\langle X; *, 0\rangle$是一个极大的BCI-部分，记为$MBI(X, A)$。X中一切极大的BCI-部分作成的集合记为$MBI(X)$。如果$A\in MBI(X)$，

且 $$|A|=\sup\{|B|: B\in MBI(X)\},$$

则称A为基数最大的极大BCI-部分。如果A为X的一个基数最大的极大BCI-部分，且$|A|<\aleph_0$，则称为最高阶的极大BCI-部分。

这个定义较长。注意，对于一个 BCH-代数来说，一般不存在按“$\sqsubseteq$”关系最大的BCI-子集，而可能有几个极大的这种BCI-子集，而它们彼此互不包含。所以,就这一点而言，BCH-代数的BCI-部分要比 BCI-代数的BCK-部分复杂得多。

例1 设 $X=\{0, 1, 2, 3\}$。X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	0	0	2
3	3	3	0	0

，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCH-代数。因为

$$((1*2)*(1*3))*(3*2)=(1*0)*0$$
$$=1\neq 0,$$

故它不满足I-1，而它满足H-1，H-2 和H-3 是容易验证的。

我们容易看出

$A_1=\{0, 1, 2\}$是$\langle X; *, 0\rangle$的一个极大的BCI—部分(其实,$\langle A_1; *, 0\rangle$是一个BCK-代数)；

而$A_2=\{0, 1, 3\}$也是$\langle X; *, 0\rangle$的一个极大的BCI-部分；

$A_3=\{0, 2, 3\}$也是$\langle X; *, 0\rangle$的一个极大的 BCI-部分。

在$\langle X; *, 0\rangle$中这三个极大的 BCI-部分都是最高阶的。

2．一种特例

由定义 1 我们易知成立下列事实：

定理 1[注319]　设⟨X; $*$, 0⟩是一个BCH-代数，对于任意的A∈MBI (X)，有

$$\{0\}\subseteq A\subseteq X. \qquad Q\cdot E\cdot D\cdot \qquad (3)$$

现在，我们来考虑一种特殊情形，即A = X的情况.此即⟨X; $*$, 0⟩是一个BCI-代数. 反之，若⟨X; $*$, 0⟩是一个BCI-代数，则X∈MBI(X)。故我们有下列：

定理 2[注320]　设⟨X; $*$, 0⟩是一个BCH-代数。则⟨X; $*$, 0⟩可BCI—化的充要条件是 X∈MBI (X)，或等价地，MBI(X) = {X}　　Q·E·D·

由此，我们易知成立下列：

推论　一个BCH-代数⟨X; $*$, 0⟩是真BCH-代数的充要条件是X∉MBI(X)，或等价地，∃A∈MBI(X)，使 A≠X (即A为X的真子集)．　　Q·E·D·

3. 另一个特例

(3) 中另一个特殊情形，即{0}∈MBI (X)．此时，亦有MBI(X) = {{0}}。这个情形说明，除了子集{0}(⊆X)满足I-1外，X的任何包含0而不等于{0}的对$*$封闭的子集皆不满足公理 I-1．对于这种情形我们引入如下一个概念：

定义 2[注321]　设⟨X; $*$, 0⟩是一个BCH-代数，如果它满足：

1) $|X|\geqslant 2$,

2) MBI(X) = {{0}},

则称⟨X; $*$, 0⟩为极不BCI-的BCH-代数。

极不 BCI-的 BCH-代数显然是真 BCH-代数。但是，作者迄今还不知道这种BCH-代数是否存在。作者在这里提出下列：

问题 1[注322] 是否存在极不BCI 的BCH-代数?

容易知道，极不BCI的BCH-代数有下列特征：

定理 3[注323] 设⟨X；＊，0⟩是一个 BCH-代数，且$|X|\geqslant 2$，则⟨X；＊，0⟩是一个极不 BCI- 的充要条件是对于X的不等于{0}的、对运算＊封闭的任意子集A（即非平凡的子代数）总有元素 x，y，$z\in A$ 使

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)\neq 0. \qquad \text{Q.E.D.} \tag{4}$$

4．注

本节的最后作几点说明。

注1 对BCH-代数来说，一般不说它的BCK-部分。一个真BCH-代数⟨X；＊，0⟩，可以有

$$X=\{x\in X:\ 0\leqslant x\}, \tag{5}$$

但它并不是一个BCK-代数。例如本节的例 1 就有

$$0*x=0,\ x=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

但⟨X；＊，0⟩是一个真BCH-代数。为了方便起见，我们给这一类BCH-代数一个定义：

定义3[注324] 如果BCH-代数⟨X；＊，0⟩满足条件(5)，即

$$\forall x\in X,\qquad 0*x=0 \text{ 或 } 0\leqslant x, \tag{6}$$

则称⟨X；＊，0⟩具有非负性的，或简称非负的。

例如，本节的例 1，例Ⅶ.1.1及例Ⅶ.1.2，皆是具有非负性的。

注 2 设⟨X；＊，0⟩是一个 BCH-代数，A_1，$A_2\in$ MBI(X)，作为BCI-代数来讲，它们分别有自己的BCK-部分，而$B(A_1)$与$B(A_2)$不必相等。

例如，例1中，$B(A_1)=A_1=\{0, 1, 2\}$，$B(A_2)=A_2=\{0, 1, 3\}$，$B(A_3)=A_3=\{0, 2, 3\}$。

§5 同态、同构和范畴

象BCK-代数和BCI-代数理论一样，BCH-代数理论也有它的同态、同构和范畴等概念。我们在本节中介绍这些概念。

1. 同态和同构的概念

我们有下列：

定义1[注325] 设$\langle X; *, 0\rangle$和$\langle Y; \curlywedge, 0\rangle$是两个BCH-代数。如果存在一个映射$f: X\to Y$，使得对于任意的$x, y\in X$有

$$f(x*y)=f(x)\curlywedge f(y), \tag{1}$$

则称f为X到Y的一个同态映射，且称X和Y是同态的，记为$X\overset{(BCH)}{\sim}Y$，在不致于混淆的情形下，也可记为$X\sim Y$或$f: X\sim Y$。

如果同态f是到Y上的，则称f为一个满同态。

如果同态f是1-1的，则称f为一个一一同态。

如果同态f是1-1到上的，则称f为一个同构；此时称X与Y是同构的，记为$X\overset{BCH}{\simeq}Y$，在不致于混淆的情形，也可记为$X\simeq Y$或$f: X\simeq Y$。

类似地，我们有自同态、自同构等概念及hom⟨X⟩和Isom⟨X⟩等记号。

例1 设$X=\{0, 1, 2, 3\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	3	3
2	2	0	0	2
3	3	0	0	0

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCH-代数．（见例Ⅶ·1·1）．

设$Y=\{\theta, a, b, c\}$，Y中的二元运算$\curlywedge$由下表给出：

$\curlywedge$	θ	a	b	c
θ	θ	θ	θ	θ
a	a	θ	θ	a
b	b	c	θ	c
c	c	θ	θ	θ

，

则$\langle Y; \theta\rangle$是一个BCH—代数（见例Ⅶ．1．2．）

命$f: X\to Y$，使

$0\longmapsto\theta,\quad 1\longmapsto b,\quad 2\longmapsto a,\quad 3\longmapsto c.$

由于

$f(0*0)=f(0)=\theta=\theta\curlywedge\theta=f(0)\curlywedge f(0),$

$f(0*1)=f(0)=\theta=\theta\curlywedge b=f(0)\curlywedge f(1),$

$f(0*2)=f(0)=\theta=\theta\curlywedge a=f(0)\curlywedge f(2),$

$f(0*3)=f(0)=\theta=\theta\curlywedge c=f(0)\curlywedge f(3),$

$f(1*0)=f(1)=b=b\curlywedge\theta=f(1)\curlywedge f(0),$

$f(1*1)=f(0)=\theta=b\curlywedge b=f(1)\curlywedge f(1),$

$f(1*2)=f(3)=c=b\curlywedge a=f(1)\curlywedge f(2),$

$f(1*3)=f(3)=c=b\curlywedge c=f(1)\curlywedge f(3),$

$f(2*0)=f(2)=a=a\curlywedge\theta=f(2)\curlywedge f(0),$

$$f(2*1)=f(0)=\theta=a\curlywedge b=f(2)\curlywedge f(1),$$

$$f(2*2)=f(0)=\theta=a\curlywedge a=f(2)\curlywedge f(2),$$

$$f(2*3)=f(2)=a=a\curlywedge c=f(2)\curlywedge f(3),$$

$$f(3*0)=f(3)=c=c\curlywedge \theta=f(3)\curlywedge f(0),$$

$$f(3*1)=f(0)=\theta=c\curlywedge b=f(3)\curlywedge f(1),$$

$$f(3*2)=f(0)=\theta=c\curlywedge a=f(3)\curlywedge f(1),$$

$$f(3*3)=f(0)=\theta=c\curlywedge c=f(3)\curlywedge f(3),$$

因此，$\langle X;\ *,\ 0\rangle\simeq\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$。

例 2 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$如例1．$Z=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$，Z中的二元运算#如下表给出：

#	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	0	0	2
3	3	3	0	0

，

则$\langle Z;\ \#,\ 0\rangle$是一个BCH-代数（见例Ⅶ．4．1）．但是，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$与$\langle Z;\ \#,\ 0\rangle$是不同构的，请读者自行验证。

2．关于同态和同构的一些性质

类似于定理Ⅰ．12．1和定理Ⅰ．12．2，我们有下列：

定理1〔注326〕同态具有反身性和传递性：同构关系是在一切BCH—代数的类中的一个等价关系．　　　　Q·E·D·

类似于定理Ⅰ．12．7的证明，我们可有下列：

定理2〔注327〕　设f是BCH-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到BCH-代数$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$的一个同态，则

1）$f(0)=\theta$,

2）$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$。　　　　　　　　Q·E·D·

定理3[注328]　设$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$是一个BCH-代数，$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$是一个（2，0）型的代数，且$f: X_1 \to X_2$是从$X_1$到$X_2$上的一一映射，满足

$$f(0_1) = 0_2, \tag{4}$$

$$f(x_1 *_1 y_1) = f(x_1) *_2 f(y_1), \tag{5}$$

则$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$是一个BCH-代数，因而$f$是从$X_1$到$X_2$上的一个同构，且$X_1 \simeq X_2$。

证　我们作下列验证：

1）验证满足公理H-1，对于任意的$x_2 \in X_2$，由于f是到上的，故$\exists x_1 \in X_1$，使

$$f(x_1) = x_2,$$

由于$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$是一个BCH-代数，故

$$x_1 *_1 x_1 = 0_1,$$

从而　　$f(x_1 *_1 x_1) = f(0_1)$，

由（5）及（4）即知

$$x_2 *_2 x_2 = f(x_1) *_2 f(x_1) = f(x_1 *_1 x_1) = f(0_1) = 0_2.$$

2）验证满足公理H-2。设x_2，y_2是X_2中的任二元素，满足

$$x_2 *_2 y_2 = y_2 *_2 x_2 = 0_2.$$

由于f是从X_1到X_2上的一一映射，因此，存在唯一的x_1和y_1满足

$$f(x_1) = x_2, \qquad f(y_1) = y_2.$$

x_1与y_1必须满足

$$x_1 *_1 y_1 = y_1 *_1 x_1 = 0_1.$$

否则，不妨设　$x_1 *_1 y_1 \neq 0_1$。那么

$$0_2 = f(0_1) \neq f(x_1 *_1 y_1) = f(x_1) *_2 f(y_1)$$
$$= x_2 *_2 y_2,$$

这与前面假设条件矛盾。这样，由于$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$满足H-2，从而$x_1 = y_1$，由$f$是映射的条件，故$x_2 = y_2$。

3）验证满足公理H-3。设x_2，y_2，z_2是X_2中任三元素，则存在$x_1, y_1, z_1 \in X_1$，使$x_2 = f(x_1)$，$y_2 = f(y_1)$，$z_2 = f(z_1)$。由于$\langle X_1; *, 0\rangle$是BCH-代数，故

$$(x_1 *_1 y_1) *_1 z_1 = (x_1 *_1 z_1) *_1 y_1,$$

由（5）则得

$$(x_2 *_2 y_2) *_2 z_2 = (x_2 *_2 z_2) *_2 y_2.$$

4）由1）—3）可知，$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$是一个BCH—代数。由于$f$是一一，到上的，故$f$是一个同构，且$X_1 \simeq X_2$。

Q·E·D·

类似于定理Ⅱ．1．4，我们有下列：

定理 4[注329] 设f：X→Y是从BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$到BCH-代数$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$上的一个同态映射，则$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$也是一个BCI-代数。

证 设x_1，y_1，z_1是X_1中的任意三个元素，由于f是到上的，故$\exists x$，y，$z \in X$，使

$$f(x) = x_1, \quad f(y) = y_1, \quad f(z) = z_1.$$

因$\langle X; *, 0\rangle$是BCI-代数，故有

$$((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0.$$

由于f是一个同态，故有

$$((x_1 *_1 y_1) *_1 (x_1 *_1 z_1)) *_1 (z_1 *_1 y_1) = 0_1.$$

从而$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$满足 I—1，所以$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$是一个BCI-代数。 Q·E·D·

3．同态的核

同态的核的概念是自然的，即下列：

定义 2〔注330〕 设f是BCH-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到BCH-代数$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$的一个同态，称集合

$$Ker(f)=\{x\in X: f(x)=\theta\}$$

为同态f的核。

类似于定理Ⅱ.12.9的证明我们可有下列：

定理 5〔注331〕 设f是BCH-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到BCH-代数$\langle Y;\ \curlywedge,\theta\rangle$上的一个同态，则$f$是一个同构的充要条件是$Ker(f)=\{0\}$。 Q·E·D·

与定理Ⅱ.12.14的证明相类似，我们可得下列：

定理 6〔注332〕 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$，$\langle Y;\ \curlywedge,\ \theta\rangle$和$\langle Z;\ \triangle,\ \theta\rangle$是三个BCH-代数，且设$h$: $X\to Y$是一个满同态，g: $X\to Z$是一个同态。如果$Ker(h)\subseteq ker(g)$，存在唯一的同态f: $Y\to Z$，使$f\cdot h=g$。 Q·E·D·

4．BCH-范畴

我们在第三章§1中曾介绍过范畴和子范畴等概念。我们可有下列结果：

定理 7〔注333〕 一切BCH-代数，与BCH-代数之间的一切同态，作成一个范畴，称为BCH-范畴，BCI-范畴是BCH-范畴的一个子范畴。 Q·E·D·

5．同态不变性和同构不变性

前面我们已多次提到过同态不变性，下面我们给以一个明确的定义。

定义 3〔注334〕 如果f是一个BCH（或BCI,BCK）-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$到BCH（对应地，BCI，BCK）-代数$\langle Y;\ \curlywedge,\theta\rangle$

上的一个同态（或同构），p是BCH（BCI，BCK）-代数的一个性质。如果$\langle X; *, 0\rangle$具有这个性质，能证得$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$也具有这个性质，则称性质p为BCH（对应地，BCI，BCK）理论中的一个同态（或同构）不变性。

下面我们给出几个同态不变性，还有一些同态不变性将在以后各节上陆续给出。

定理 8〔注335〕 可BCI-化的性质是一个同态不变性。

证 这由定理4可知。 Q. E. D.

类似地，易知成立下列：

定理 9〔注336〕 可直接BCK-化的性质是一个同态不变性， Q. E. D.

我们还有下列：

定理10〔注337〕 非负性是一个同态不变性。

证 设f是从BCH-代数$\langle X; *, 0\rangle$到BCH-代数$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$上的一个同态映射。又设$\langle X; *, 0\rangle$具有非负性（见定义Ⅶ.4.3）。设$y$是Y中的任一元素，由于$f$是到上的，故$\exists x \in X$，使$f(x) = y$，因$\langle X; *, 0\rangle$是非负的，从而

$$0 * x = 0.$$

由于f是一个同态，故

$$\theta = f(0) = f(0 * x) = f(0) \curlywedge f(x) = \theta \curlywedge y,$$

从而$\langle Y; \curlywedge, \theta\rangle$也是非负的。 Q·E·D·

§6 子代数

在BCK-代数理论和BCI-代数理论中我们都讨论过从一个已知的代数或一族已知的代数出发构造新代数的问题，主要有子

代数、并代数、积代数和商代数等。在BCH-代数中我们也讨论构造新代数的问题，这一节先讨论子代数。

1．子代数的概念

类似于BCK-代数的子代数和BCI-代数的子代数的概念，我们有下列：

定义1〔注338〕 BCH-代数⟨X；∗，0⟩的子集Y被称为是它的子代数，如果⟨Y；∗，0⟩是一个BCH—代数。

显然，我们有下列：

定理1〔注339〕 一个BCH-代数⟨X；∗，0⟩的一个非空子集Y是它的一个子代数的充要条件是Y对运算∗封闭。

证 类似于定理Ⅱ·6·12的证明。 Q·E·D·

例1 设⟨X；∗，0⟩是一个任意的BCH-代数，则{0}和X都是它的子代数。

类似于定义Ⅱ·6·2，我们可定义平凡的子代数、真子代数、极大子代数、最大子代数、具有性质p的极大子代数等，这里不一一详述了。

例2 设X＝{0，1，2，3}，X中的二元运算∗由下表给出：

∗	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	0	0	2
3	3	3	0	0

则⟨X；∗，0⟩是一个BCH-代数。A_1＝{0，1，2}是具有BCK-性质的一个极大子代数，A_2＝{0，1，3}也是一个具有BCK-性质的极大子代数，A_3＝{0，2，3}还是一个具有

BCK-性质的极大子代数。

BCH-代数的子代数有下列性质：

定理 2〔注340〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCH-代数。

1）如果A_1和A_2是X的子代数，则$A_1 \cap A_2$是X的子代数。

2）如果对于$\alpha \in \omega_\mu$，A_α皆是X的子代数，其中ω_μ为基数$\aleph_\mu$的初始序数，且

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_\alpha \subseteq \cdots, \quad \alpha \in \omega_\mu,$$

则$U\{A_\alpha, \alpha \in \omega_\mu\} = A$是$X$的子代数。

证 1）由于$0 \in A_1$，$0 \in A_2$，故$0 \in A_1 \cap A_2$。 设x，$y \in A_1 \cap A_2$，从而x，$y \in A_1$，x，$y \in A_2$。因A_1，A_2是X的子代数，故

$$x * y \in A_1, \quad x * y \in A_2,$$

从而$x * y \in A_1 \cap A_2$。所以$A_1 \cap A_2$是X的子代数。

2）由于$0 \in A_0$，故$0 \in A$。设x，$y \in A$。则$\exists \alpha, \beta \in \omega_\mu$，使 $x \in A_\alpha$，$y \in A_\beta$。

不妨设$\alpha \leqslant \beta$，这样$x \in A_\alpha \subseteq A_\beta$，从而$x$，$y$皆$\in A_\beta$。由于$A_\beta$是X的子代数，故

$$x * y \in A_\beta \subseteq A.$$

因此，A是X的一个子代数。 Q·E·D·

注 1 1° 2）中如果$A \subset X$，则A是一个真子代数，从而每个A_α（$\alpha \in \omega_\mu$）也是真子代数。

2° 这个定理也运用于BCK-代数和BCI-代数。

3° 1）可推广为：$\forall \alpha \in I$，A_α是$\langle X; *, 0\rangle$的子代数，则$\cap\{A_\alpha : \alpha \in I\}$亦然。

2．同态与子代数的关系

类似于定理Ⅱ·6·6，定理Ⅱ·6·7，和定理Ⅱ·6·8的

证明，我们可有下列结果：

定理 3〔注341〕 设f是BCH-代数$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$到BCH-代数$\langle X_2, *_2, 0_2\rangle$的一个同态映射，则Ker (f) 是X_1的一个子代数。 Q·E·D·

定理 4〔注342〕 设f是BCH-代数$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$到BCH-代数$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$的一个同态映射，$S_1$是$X_1$的一个子代数，则$S_2 = f[S_1]$是$X_2$的一个子代数。 Q·E·D·

定理 5〔注343〕 设f是BCH-代数$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$到BCH-代数$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$上的一个同态映射，$S_2$是$X_2$的一个子代数，则$S_1 = \{x_1 \in X_1 : f(x_1) \in S_2\}$是$X_1$的一个子代数。

Q·E·D·

下面我们给出一个特殊的子代数。

定理 6〔注344〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCH-代数．若$A \in$ MBI (X)，则A是X的一个子代数。

Q·E·D·

定理 7〔注345〕 设f是BCH-代数$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$到BCH-代数$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$上的一个同构映射，则

$$A \in MBI(X_1) \Longleftrightarrow f[A] \in MBI(X_2). \qquad (1)$$

证 如果$A = X_1$，则定理自真．设$A \subset X_2$，从而X_1是真BCH-代数．由定理6，A是X_1的一个子代数．由定理4，$f[A]$是X_2的一个子代数．由于A具有BCI-性质，故$f[A]$亦具有BCI-性质（因f是一个同构）．如果$f[A]$在X_2中不是具有BCI-性质的极大子集，则有$B \in MBI(X_2)$使得$f^{-1}[B] \supset A$。而$f^{-1}[B]$亦是具有BCI-性质的子集。这与$A \in MBI(X)$矛盾．从而$f[A] \in MBI(X_2)$．由于f是同构，充分性同样可证。

Q·E·D·

3．极大子代数的存在性

由于定理2的2）成立，类似于定理Ⅱ·6·12的证明，我们可有下列结果：

定理8〔注346〕 设〈X；∗，0〉是一个BCH-代数.A(X)为X的一切真子代数作成之集，如果满足条件

$$X-U\mathscr{A}(X)\neq\phi, \quad (2)$$

则在承认选择公理的条件下X的每个真子代数可扩充为X的一个极大的子代数。 Q·E·D·

4．遗传性

在BCH-代数理论中我们也引入遗传性的概念。

定义2〔注347〕 如果任意的一个BCH-代数〈X；∗，0〉具有一个性质P，而能证明它的每一个子代数也具有性质P，则称P为一个遗传性。

我们在这里给出几个遗传性。

定理9〔注348〕 可BCI-化的性质是一个遗传性。

Q·E·D·

定理10〔注349〕 可直接BCK-化的性质是一个遗传性。

Q·E·D·

定理11〔注350〕 非负性是一个遗传性。 Q·E·D·

§7 并代数

与BCI-代数一样，我们不能在BCH-代数理论中如定理Ⅱ·11·1那样定义并代数。但是对于非负的BCH-代数，我们完全可以类似地定义并代数。这一节我们对此作些简单的讨论。

我们先有下列：

定理 1[注351] 设$\{\langle X_\alpha;\ *_\alpha, 0_\alpha\rangle:\alpha\in I\}$是一族非负的BCH-代数，其中 I 是一个非空指标集，如果对于不同的i，$j\in I$，$X_i\cap X_j=\{0\}$，其中$0=0_i=0_j$，且定义

$$X=U\{X_\alpha:\alpha\in I\},$$

$$*:\ x*y=\begin{cases}x*_\alpha y, & \text{当}\ x,\ y\in\text{同一个}\ X_\alpha,\\ x, & \text{当}\ x,\ y\text{不属于同一个}\ X_\alpha,\end{cases}\qquad (1)$$

则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个BCH-代数，称之为这一族非负BCH-代数的并代数。（这一方法常称为并扩张。）

证 1）验证H-1．设$x\in X$，则$\exists\alpha\in I$，使$x\in X_\alpha$，于是

$$x*x=x*_\alpha x=0_\alpha=0.$$

2）验证H—2．设x，$y\in X$，且

$$x*y=y*x=0. \qquad (2)$$

如果x和y属于同一个X_α，因为$\langle X_\alpha;\ *_\alpha, 0_\alpha\rangle$是一个BCH-代数，从而$x=y$。

如果x和y不属于同一个X_α，则

$$x*y=x,\qquad y*x=y.$$

由条件（2）知，$x=y=0$．这与假设情形矛盾．因此这种情形不可能发生。

3）验证H-3．设x，y，$z\in X$。

如果x，y，z属于同一个X_α，则

$$(x*y)*z=(x*_\alpha y)*_\alpha z=(x*_\alpha z)*_\alpha y$$
$$=(x*z)*y.$$

如果z，y与x不在同一个X_α中，即如果$x\in X_\alpha$，则$y\notin X_\alpha$，$z\notin X_\alpha$，从而

$$(x*y)*z=x=(x*z)*y,$$

如果 y 和 z 中仅有一个与 x 在同一个 X_a 中，不妨设 $y\in X_a$，$z\overline{\in} X_a$，则

$$(x*y)*z=\begin{cases}x*_a y, & x*_a y\neq 0,\\ 0*z=0, & x*_a y=0,\end{cases}$$

而

$$(x*z)*y=x*y=\begin{cases}x*_a y, & x*_a y\neq 0,\\ 0, & x*_a y=0.\end{cases}$$

故总有

$$(x*y)*z=(x*z)*y. \qquad \text{Q.E.D.}$$

注 1　对于一般情况（不必只交于{0}），我们可如同定理Ⅱ.11.2那样利用“拆开，等置”的方法定义一族非负BCH-代数的并代数。

下面我们就并代数举一个例子。

例 1　设$X_1=\{0,a,b,c\}$，X_1中的二元运算$*_1$由下表给出：

$*_1$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	c	c
b	b	0	0	b
c	c	0	0	0

，

则$\langle X_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$是一个BCH-代数。又设$X_2=\{0,\ d,\ e,\ f\}$，$*_2$由下表给出：

$*_2$	0	d	e	f
0	0	0	0	0
d	d	0	0	d
e	e	f	0	f
f	f	0	0	0

，

则$\langle X_2; *_2, 0\rangle$是一个BCH—代数。

显然，X_1和X_2都是非负的，设$\langle X; *, 0\rangle$是$\langle X_1; *_1, 0\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0\rangle$的并代数，则$X=\{0, a, b, c, d, e, f\}$，而X的二元运算$*$实际上由下表给出：

$*$	0	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	c	c	a	a	a
b	b	0	0	b	b	b	b
c	c	0	0	0	c	c	c
d	d	d	d	d	0	0	d
e	e	e	e	e	f	0	f
f	f	f	f	f	0	0	0

现在，我们来讨论有关并代数的一些结果。首先，易知有下列：

定理 2〔注352〕 一族非负的BCH-代数的并代数是非负的。

证 设$\langle X; *, 0\rangle$是一族非负的BCH-代数$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle: \alpha\in I\}$的并代数。由定理1知，$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCH-代数。设$x$是X的任一元素。则存在$\alpha\in I$，使$x\in X_\alpha$。于是，$0*x=0*_\alpha x=0$。故$\langle X; *, 0\rangle$是非负的。Q·E·D·

注 2 由于BCK-代数皆是非负的BCH-代数故一族非负的BCH-代数中可以有BCK-代数，甚至可以全是BCK-代数。显然，由于一族BCK-代数来讲，作为BCK-代数的并代数与作为非负的BCH-代数的并代数是完全一致的。然而，我们还有下列结果：

定理 3〔注353〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一族非负的BCH-代数$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle: \alpha\in I\}$的并代数。如果在这一族BCH-代

数中至少有一个是真BCH-代数，则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCH-代数。

证 由定理1知，$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCH-代数。由条件，不妨设$\langle X_a; *_a, 0_a\rangle$是一个真BCH-代数，则存在$x, y, z\in X_a$，使

$$((x*_a y)*_a(x*_a z))*_a(z*_a y)\neq 0_a.$$

于是，在X中有元素x，y，z，使

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)\neq 0.$$

因此，$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCH-代数。　　Q·E·D·

由这个定理我们进一步可以得到下列：

定理4〔注354〕 对于任意的基数$\alpha\geqslant 4$存在基数为α的非负的真BCH-代数。当$\alpha\leqslant 3$时，基数为α的真BCH-代数不存在。

证 因为对于任意的基数$\alpha>0$，存在基数α的BCK-代数，我们可以如下来作：

当$\alpha=4$时，我们就取上面例1中的真BCH-代数$\langle X_1; *_1, 0\rangle$。

当$\alpha>4$时，且α为有限数时，我们取一个$n=(\alpha-4)+1=\alpha-3$阶的BCK-代数$\langle X_2; *_2, 0\rangle$，使$a$，$b$，$c\notin X_2$（这总可以办到，只要适当改变元素的符号即可），则$\langle X_1; *_1, 0\rangle$与$\langle X_2; *_2, 0\rangle$的并代数即为所求的$\alpha$阶的非负的真BCH-代数。

当$\alpha>4$，且α为无限基数时，我们任取一个基数为α的BCK-代数$\langle X_2; *_2, 0\rangle$，使$a$，$b$，$c\notin X_2$（同样可以办到）。则$\langle X_1; *_1, 0\rangle$与$\langle X_2; *_2, 0\rangle$的并代数即为所求的基数为$\alpha$的非负的真BCH-代数。

当$\alpha\leqslant 3$时通过直接计算可以证明，不存在基数为$\alpha\leqslant 3$的真BCH-代数。　　Q·E·D·

由定理4我们进一步可以得到下列：

定理5[注355] 一切非负的真BCH-代数作成一个真类（称为非负真BCH-代数类），从而一切真BCH-代数作成一个真类。 Q·E·D·

§8 积代数

BCK-代数和BCI-代数有积代数的概念，BCH-代数理论中也有积代数的概念。当然，利用乘积构造积代数的方法是BCH-代数理论中构造新代数的一种方法。在这一节中，我们介绍一下BCH-代数的积代数的有关概念和结果。

1．积代数的概念

类似于定理Ⅱ·5·1，我们有下列结果：

定理1[注356] 设$\langle X_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$和$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$是两个BCH-代数．命

$$\left.\begin{array}{l} X = X_1 \times X_2, \\ *:\ (x_1,\ x_2)*(y_1,\ y_2) = (x_1 *_1 y_1,\ x_2 *_2 y_2), \\ 0 = (0_1,\ 0_2). \end{array}\right\} \quad (1)$$

则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个BCH-代数，称为$\langle X_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$和$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$的积BCH—代数，在不致于混淆时亦简称为积代数。

证 只要验证满足H-1，H-2，H-3．分别验证如下：

1）满足H-1．事实上，对于任意的$(x,\ y)\in X$，我们有

$(x,\ y)*(x,\ y) = (x *_1 x,\ y *_1 y) = (0_1,\ 0_2) = 0$．

2）满足H-2．事实上，如果

$$(x_1,\ y_1)*(x_2,\ y_2) = (x_2,\ y_2)*(x_1,\ y_1) = 0$$
$$= (0_1,\ 0_2),$$

由（1）则有

$$(x_1 *_1 x_2, y_1 *_2 y_2) = (x_2 *_1 x_1,\ y_2 *_1 y_1) = 0$$
$$= (0_1,\ 0_2),$$

故有

$$x_1 *_1 x_2 = x_2 *_1 x_1 = 0_1,$$
$$y_1 *_2 y_2 = y_2 *_2 y_1 = 0_2.$$

由于$\langle X_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$都是BCH-代数，故$x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$。所以$(x_1,\ y_1) = (x_2,\ y_2)$。

3）满足H-3。设$z_1 = (x_1,\ y_1)$，$z_2 = (x_2,\ y_2)$，$z_3 = (x_3,\ y_3)$是X中任意三个元素。我们作下列计算：

$$(z_1 * z_2) * z_3 = ((x_1,\ y_1) * (x_2,\ y_2)) * (x_3,\ y_3)$$
$$= (x_1 *_1 x_2,\ y_1 *_2 y_2) * (x_3,\ y_3)$$
$$= ((x_1 *_1 x_2) *_1 x_3,\ (y_1 *_2 y_2) *_2 y_3)$$
$$= ((x_1 *_1 x_3) *_1 x_2,\ (y_1 *_2 y_3) *_2 y_2)$$
$$= (x_1 *_1 x_3,\ y_1 *_2 y_3) * (x_2 * y_2)$$
$$= ((x_1,\ y_1) * (x_3,\ y_3)) * (x_2,\ y_2)$$
$$= (z_1 * z_3) * z_2. \qquad \text{Q·E·D·}$$

用数学归纳法我们可以建立任意有限个BCH—代数的积代数。更一般地，我们有下列：

定理2〔注357〕 设$\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle$ $(\alpha \in I)$是一族BCH-代数，其中I是指标集。设$X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in I\}$是一切映射$f: I \to U\{X_\alpha : \alpha \in I\}$的集合，使得$f(\alpha) \in X_\alpha$。对于任意的$f, g \in X$，定义$f * g$为：

$$(f * g)(\alpha) = f(\alpha) *_\alpha g(\alpha),\ \forall \alpha \in I, \qquad (2)$$

且

$$0(\alpha) = 0_\alpha, \qquad \forall \alpha \in I, \qquad (3)$$

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCH-代数，称为这一族BCH-代数的积代数。

证 我们分别验证于下：

1）满足H-1。设f是X中的任一元素，则对于任意的$\alpha \in I$，有

$$(f*f)(\alpha)=f(\alpha)*_{\alpha}f(\alpha)=0_{\alpha}=0(\alpha),$$

故$f*f=0$。

2）满足H-2。设$f, g\in X$，满足

$$f*g=g*f=0.$$

则对于任意的$\alpha\in I$有

$$(f*g)(\alpha)=(g*f)(\alpha)=0(\alpha),$$

故

$$f(\alpha)*_{\alpha}g(\alpha)=g(\alpha)*_{\alpha}f(\alpha)=0(\alpha)=0_{\alpha}.$$

由于$\langle X_{\alpha}; *_{\alpha}, 0_{\alpha}\rangle$是一个BCH—代数，故

$$f(\alpha)=g(\alpha), \qquad \forall\alpha\in I.$$

因此，$f=g$。

3）满足H—3。设f, g, h是X中任意三个元素。对于任意的$\alpha\in I$，由于$\langle X_{\alpha}; *_{\alpha}, 0_{\alpha}\rangle$是BCH-代数，则有

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(\alpha)&=(f(\alpha)*_{\alpha}g(\alpha))*_{\alpha}h(\alpha)\\&=(f(\alpha)*_{\alpha}h(\alpha))*_{\alpha}g(\alpha)\\&=((f*h)*g)(\alpha).\end{aligned}$$

故有

$$(f*g)*h=(f*h)*g. \qquad Q\cdot E\cdot D\cdot$$

2．可积性和逆可积性

下列定义给出BCH-代数理论中可积性和逆可积性的概念。

定义1〔注358〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是任意的一族BCH-代数

$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle : \alpha\in I\}$的积代数，设P是BCH-代数的一个性质。如果每个$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$具有性质P，可证积代数$\langle X; *, 0\rangle$也具有性质P，称P为一个可积性。反之，若积代数$\langle X; *, 0\rangle$具有性质P，而可证明每个BCH-代数$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$也具有性质P。则称P为逆可积性。

类似于定义Ⅱ·5·2，我们可有可数可积性（逆可积性）和有限可积性（逆可积性）等概念，这里不再重复。

我们有下列可积性和逆可积性：

定理 3〔注359〕 可BCI-化的性质是一个可积性，也是一个逆可积性。 Q·E·D·

定理 4〔注360〕 可直接BCK-化的性质是一个可积性，也是一个逆可积性。 Q·E·D·

定理 5〔注361〕 非负性是一个可积性，也是一个逆可积性。 Q. E. D.

定理 6〔注362〕 "是真BCH-代数"的性质是一个可积性。 Q·E·D·

我们可给出比定理6更一般的结果，并且作为一个例子，我们较详细地给出它的证明，即下列：

定理 7〔注363〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一族BCH-代数$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle : \alpha\in I\}$的积代数。$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCH-代数的充要条件是存在$\alpha\in I$，使$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$是真BCH-代数。

证 "$\Leftarrow$"。由于$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$是一个真BCH-代数，故存在$x_\alpha$中的三个元素$x_\alpha$，$y_\alpha$，$z_\alpha$，使

$$((x_\alpha *_\alpha y_\alpha) *_\alpha (x_\alpha *_\alpha z_\alpha)) *_\alpha (z_\alpha *_\alpha y_\alpha) \neq 0_\alpha.$$

（4）

命

$$f(\beta)=\begin{cases}x_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}\qquad g(\beta)=\begin{cases}y_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha,\end{cases}$$

$$h(\beta)=\begin{cases}z_\alpha, & \beta=\alpha,\\ 0_\beta, & \beta\neq\alpha.\end{cases}$$

则f，g，$h\in X$，由于（4）因而

$$((f*g)*(f*h))*(h*g)\neq 0. \qquad (5)$$

故$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是真BCH-代数。

"⇒"．由于$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个真BCH-代数，故存在f，g，$h\in X$，使（5）成立，从而$\exists\alpha\in I$，使

$$((f(\alpha)*_\alpha g(\alpha))*_\alpha(f(\alpha)*_\alpha h(\alpha)))*_\alpha(h(\alpha)*_\alpha g(\alpha))\neq 0_\alpha,$$

故$\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle$是一个BCH-代数。　　　　Q·E·D·

3．积代数的子代数

关于积代数的子代数，类似于定理Ⅱ·6·10的证明，我们有下列结果：

定理8〔注364〕　设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一族BCH-代数$\{\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle:\alpha\in I\}$的积代数。则有

1）若A是X的子代数，那么对于任意的$\alpha\in I$，

$$A_\alpha=\{f(\alpha):f\in A\} \qquad (6)$$

是X_α的一个子代数。

2）若A_α是X_α的一个子代数，$\alpha\in I$，那么$A=\Pi\{A_\alpha:\alpha\in I\}$是X的一个子代数。　　　　Q·E·D·

类似于定理Ⅱ·6·11的证明，我们有下列：

定理9〔注365〕　设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一族BCH—代数$\{\langle X_\alpha;\ *_\alpha,\ 0_\alpha\rangle:\alpha\in I\}$的积代数。则有：若A是X的一个极大（最大）

的子代数，那么对于任意的$\alpha\in I$，

$$A_\alpha=\{f(\alpha):f\in A\}\neq X_\alpha$$

是X_α的一个极大（最大）的子代数。　　Q·E·D·

§9　理　　想

K·Iséki 在BCK-代数理论和 BCI-代数理论中引入了理想概念。这一节中我们在BCH-代数理论中也引入理想的概念，并对之作一些初步的讨论。

1．理想的概念

类似于 BCK-代数和 BCI-代数的理想概念，我们有下列：

定义 1〔注366〕　设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个 BCH-代数。X 的一个非空子集A被称为一个理想，如果它满足：

$$0\in A, \qquad (1)$$

$$x\in A,\ y*x\in A\Rightarrow y\in A. \qquad (2)$$

例 1　对于任意的BCH-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$，$\{0\}$和X都是这个BCH-代数的理想。$\{0\}$被称为它的平凡想理。

定义 2〔注367〕　如果BCH-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$除了$\{0\}$和X外没有其它的理想，那么称它为单 BCH-代数。否则，称为非单 BCH-代数。单代数又被称为具有单性的。

例 2　设$X=\{0,\ 1\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

*	0	1
0	0	1
1	1	0

，

则⟨X；$*$，0⟩是单BCH-代数。（且是一个BCI-代数。）

例3 设X = {0，1，2，3}，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	3	3
2	2	0	0	2
3	3	0	0	0

，

则⟨X；$*$，0⟩是一个真BCH-代数，且具有单性。

例4 设X = {0，a，b，c，d，e，f}，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	c	c	a	a	a
b	b	0	0	b	b	b	b
c	c	0	0	0	c	c	c
d	d	d	d	d	0	0	d
e	e	e	e	e	f	0	f
f	f	f	f	f	0	0	0

，

则⟨X；$*$，0⟩是一个真BCH-代数（见例Ⅷ.7.1）。它不是单的，因

$$A_1 = \{0, a, b, c\}, \quad A_2 = \{0, d, e, f\}$$

皆是它的理想。

象A_1，A_2这样的理想，类似于定义Ⅱ.8.3，我们有下列：

定义3 [注368] BCH—代数⟨X；$*$，0⟩的一个理想A如果是X的一个真子集，则称之为一个真理想，

我们还有下列：

定义 4[注369]　BCH-代数$\langle X;\ *, 0\rangle$的一切理想作成的集合记为ID(X)。

我们有下列事实：

$$ID(X)\subseteq P(X), \tag{3}$$

$$2\leqslant|ID(X)|\leqslant|P(X)|. \tag{4}$$

例 2 和例 3 说明了(4)中第一个不等号中可以取得等号，甚至有满

$$|ID(X)|=2$$

足的真BCH-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$（如例 3）。对于（4）中的第二个不等号，我们已证过，存在BCK-代数或真BCI-代数，使

$$|ID(X)|=|P(X)|. \tag{5}$$

那么是否存在真BCH-代数满足（5）呢？

这个问题的回答是肯定的，我们有下列结果：

定理 1[注370]　存在一个真BCH-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$，使（5）成立。

证　取定理Ⅱ·8·1证明中构造的基数为$\aleph_0$的BCK-代数$\langle X_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$，它满足

$$|ID(X_1)|=|P(X_1)|. \tag{6}$$

我们取例 3 中的真BCH-代数为$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$。然后，我们用并扩张的方法构造一个新的BCH-代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$。则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$满足要求。

事实上，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个真BCH-代数，且

$$|X|=|X_1UX_2|=|X_1|=\aleph_0$$

此外　$|P(X)|=|P(X_1)|=|ID(X_1)|\leqslant|ID(X)|$

$$\leqslant|P(X)|, \tag{7}$$

从而（5）成立。　　　　Q·E·D·

注 1　（7）中的第一个不等号成立是用到了这样的一个事实：若$\langle X;*,0\rangle$是一族非负的BCH-代数$\{\langle X_\alpha;*_\alpha,0_\alpha\rangle:\alpha\in I\}$的并代数，那么对于任意的$\alpha\in I$，$\langle X_\alpha;*_\alpha,0_\alpha\rangle$的每个理想皆是$\langle X;*,0\rangle$的理想。这一事实我们在本节定理10推论中给出。

注 2　为了清楚起见，我们有必要具体地给出定理1的证明中构造的真BCH-代数$\langle X;*,0\rangle$，即下列：

例 5　设$X_1=\{0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$是一个可数集，在$X_1$中建立一个序关系：

$0<a_n$，　$n=1,2,\cdots$，　a_i与a_j不可比较，$i\neq j$。

则$(X_1,\leqslant)$是一个半序集。在X中定义一个二元运算$*_1$如下：

$$x*_1y=\begin{cases}0, & x\leqslant y,\\ x, & \text{否则}\end{cases}$$

则$\langle X_1;*_0,0\rangle$是一个BCK-代数，且$|ID(X_1)|=|P(X_1)|=2^{\aleph_0}$。

我们再具体地给出$\langle X_1;*_1,0\rangle$的乘法表：

$*_1$	0	a_1	a_2	a_3	…	a_4	…
0	0	0	0	0	…	0	…
a_1	a_1	0	a_1	a_1	…	a_1	…
a_2	a_2	a_2	0	a_2	…	a_2	…
a_3	a_3	a_3	a_3	0	…	a_3	…
·	………………						
·	………………						
·	………………						
a_n	a_n	a_n	a_n	a_n	…	0	…
·	………………						
·	………………						
·	………………						

我们再取一个四阶的真 BCH-代数，设$X_2=\{0, c_1, c_2, c_3\}$。X_2中的二元运算$*_2$由下表给出：

$*_2$	0	c_1	c_2	c_3
0	0	0	0	0
c_1	c_1	0	c_3	c_3
c_2	c_2	0	0	c_2
c_3	c_3	0	0	0

则$\langle X_2; *_2, 0\rangle$是一个真BCH-代数。

设$\langle X; *, 0\rangle$是$\langle X_1; *_1, 0\rangle$和$\langle X_2, *_2, 0\rangle$的并代数，则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真 BCH-代数，且满足$|ID(X)|=|P(X)|$，而$\langle X; *, 0\rangle$的乘法表为：

$*$	0	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n	$\cdots$	c_1	c_2	c_3
0	0	0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	0
a_1	a_1	0	a_1	a_1	$\cdots$	a_1	$\cdots$	a_1	a_1	a_1
a_2	a_2	a_2	0	a_2	$\cdots$	a_2	$\cdots$	a_2	a_2	a_2
a_3	a_3	a_3	a_3	0	$\cdots$	a_3	$\cdots$	a_3	a_3	a_3
·	……									
·	……									
·	……									
a_n	a_n	a_n	a_n	a_n	$\cdots$	0	$\cdots$	a_n	a_n	a_n
·	……									
·	……									
·	……									
c_1	c_1	c_1	c_1	c_1	$\cdots$	c_1	$\cdots$	0	c_3	c_3
c_2	c_2	c_2	c_2	c_2	$\cdots$	c_2	$\cdots$	0	0	c_2
c_3	c_3	c_3	c_3	c_3	$\cdots$	c_3	$\cdots$	0	0	0

这样，我们实际上得到了下列：

定理 2〔注371〕 存在基数为$\aleph_0$的非负的真BCH-代数满足（5）。 Q·E·D·

由例3及定理1和定理2我们可有下列：

定理 3〔注372〕 对于任意的BCH-代数⟨X；∗，0⟩成立：

$$2 \leqslant |ID(X)| \leqslant |P(X)|. \qquad (4)$$

存在真BCH-代数使（4）中的不等号分别成为等号。

Q·E·D·

2．理想的性质

BCH-代数的理想有以下一些主要性质。

定理 4〔注373〕 设A是BCH-代数⟨X；∗，0⟩的一个理想；$x \in A$，$y \leqslant x$，则$y \in A$，从而初始段

$$A(x) = \{y \in X : y \leqslant x\} \subseteq A. \qquad (8)$$

证 类似于定理Ⅰ·8·3。

Q·E·D·

推论〔注374〕 $A = \bigcup \{A(x) : x \in A\}$，A是⟨X；∗，0⟩的一个理想。

Q·E·D·（9）

显然，BCH-代数的理想不必是子代数，而子代数也不必是理想。读者可自行列举真BCH-代数的例子。我们当然对皆是理想又是子代数的子集感兴趣，对于这种子集，类似于定义Ⅵ·4·3，我们引入下列：

定义 5〔注375〕 设⟨X；∗，0⟩是一个BCH-代数，如果子集$A \subseteq X$皆是理想，又是子代数，则称之为理想子代数。X的一切理想子代数作成的集合记为IDS(X)。

显然，对于任意的BCH-代数⟨X；∗，0⟩总有

$$\{0\}\in IDS(X),\quad X\in IDS(X). \tag{10}$$

故我们有下列：

定理 5[注376] 设⟨X；∗，0⟩是一个BCH-代数，则

$$\phi\neq IDS(X)\subseteq ID(X)\subseteq P(X). \quad Q\cdot E\cdot D\cdot \tag{11}$$

对于理想子代数，类似于定理Ⅱ·8·6的证明，我们有下列：

定理 6[注377] 设⟨X；∗，0⟩是一个BCH-代数，A∈IDS(X)，D⊆A．则D是X的一个理想的充要条件是D是A的一个理想。 Q·E·D·

类似于定理Ⅱ·8·7的证明，我们有下列：

定理 7[注378] 设⟨X；∗，0⟩是一个BCH-代数．$\phi\neq\mathscr{U}\subseteq ID(X)$，则$\cap\mathscr{U}\in ID(X)$。

Q·E·D·

由定理7和注Ⅶ·6·1，3°我们有下列：

推论[注379] 设⟨X；∗，0⟩是一个BCH-代数，$\phi\neq\mathscr{U}\subseteq IDS(X)$，

则 $\cap\mathscr{U}\in IDS(X)$。 Q·E·D·

对于同态，我们有下列结果（证明类似于定理Ⅱ·8·8）：

定理 8[注380] 设f是BCH-代数⟨X；∗，0⟩到BCH-代数⟨X_1；$*_1$，0_1⟩的一个同态映射，则Ker(f)是X的一个理想。

Q·E·D·

更一般地，类似于定理Ⅱ·8·9的证明，我们有下列：

定理 9[注381] 设f是BCH-代数⟨X；∗，0⟩到BCH-代数⟨X_1；$*_1$，0_1⟩的一个同态．如果A_1是X_1的一个理想，则$f^{-1}[A_1]$是X的一个理想。 Q·E·D·

对于并代数的理想，我们有下列：

定理10[注382]　设$\langle X; *, 0\rangle$是一族非负的BCH-代数$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle : \alpha\in I\}$的并代数。

1）如果对于任意的α，A_α是X_α的一个理想，则$A=\cup\{A_\alpha : \alpha\in I\}$是$X$的一个理想。

2）如果A是X的一个理想，则$\forall\alpha\in I$，$A_\alpha=A\cap X_\alpha$是X_α的一个理想。　　Q·E·D·

我们有如下显然的推论：

推论[注383]　设$\langle X; *, 0\rangle$是一族非负的BCH-代数$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle : \alpha\in I\}$的并代数。则$\forall_\alpha\in I, A\subseteq X_\alpha$是$X_\alpha$的理想$\Longleftrightarrow A$是X的理想。

证　"$\Rightarrow$"．命

$$A_\beta=\begin{cases}A, & \beta=\alpha,\\ \{0\}, & \beta\neq\alpha,\end{cases}$$

则$A_\beta(\beta\in I)$是X_β的理想。故$A=\cup\{A_\beta; \beta\in I\}$是X的理想，据定理10的1）。

"$\Leftarrow$"．由定理10的2）即知。　　Q·E·D·

注3[注384]　显然，这个推论对于BCK-代数亦真。我们不再列出对应的命题了。对于积代数，类似于定理Ⅱ·8·10的证明我们有下列：

定理11[注385]　设$\langle X; *, 0\rangle$是一族BCH-代数$\{\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle : \alpha\in I\}$的积代数。若对于每个$\alpha\in I$，$A_\alpha$是$X_\alpha$的一个想理，则$A=\Pi\{A_\alpha : \alpha\in I\}$是X的一个理想。Q·E·D·

注4　定理9—11中，把"理想"二字换成"真理想"的适当命题也成立。

3．由于A集生成的理想

定义6[注386] 设A是BCH-代数〈X；$*$，0〉的一个非空子集。

1）记包含A的一切理想的集合为ID(X，A)。

2）称ID(X，A)中按"⊑"决定的最小元为由A生成的理想，记为(A]。并规定(φ]={0}。

类似于定理Ⅱ·8·11的证明，我们有下列：

定理12[注387] 设〈X；$*$，0〉是一个BCH-代数，A⊆X，A非空，则ID(X，A)非空，且

$$(A] = \cap ID(X,\ A). \qquad Q\cdot E\cdot D\cdot (12)$$

类似于定理Ⅱ.8.12的证明，我们有下列：

定理13[注388] 设M是BCH-代数〈X；$*$，0〉的一个子集，则唯一地存在包含M的最小理想(M]，且命$M^* = M\cup\{0\}$，则

$$(M] = \{x\in X : \exists a_1,\ \cdots,\ a_n\in M^*,\ (\cdots(x*a_1)*\cdots)*a_n = 0\}. \qquad (13)$$

4．关于理想的几个概念

类似于BCI-代数有关理想的一些概念，我们有下列概念：

定义7[注389] 设〈X；$*$，0〉是一个BCH-代数。一个非空子集A⊆X被称为一个关联理想，如果0∈A，且

$$(y*x)*z\in A,\qquad x*z\in A \Rightarrow y*z\in A. \qquad (14)$$

例6 设〈X；$*$，0〉是任意的一个BCH—代数，则X是它的一个关联理想。

类似于定理Ⅱ.8.7的证明，我们有下列：

定理14[注390] 设〈X；$*$，0〉是一个BCH-代数。则X的任何关联理想是一个理想。 Q·E·D·

定义 8〔注391〕 设〈X；$*$，0〉是一个BCH-代数。X的理想A被称为极大的，如果它满足：

1）A是一个真理想。

2）A不是X的任何真理想的真子集。

本节中有些结果由"理想"二字改成"极大理想"，适当改变一下语句，那么适当的命题仍成立。这一点留给读者作为练习。

§10 非负的BCH-代数

在前面几节中，我们曾经定义了非负的BCH-代数，并得到过非负BCH-代数的一些初步的结果。在这一节，我们对非负的BCH-代数再作一些讨论。

1．概述

我们先在这里复习一下非负的BCH-代数的概念和已有的一些结果。

定义Ⅶ·4·3给出了非负的BCH-代数的概念。如果一个BCH-代数〈X；$*$，0〉满足：

$$\forall x\in X,\ 0*x=0\ （或0\leqslant x）, \quad (1)$$

则称它是非负的。

我们已经得到了非负的BCH—代数的一些性质，例如：

定理Ⅶ·5·10指出，非负性是一个同态不变性。

定理Ⅶ·6·11指出，非负性是一个遗传性。

定理Ⅶ·7·1给出了一族非负BCH-代数的并代数的概念，并指出这个并代数也是BCH-代数。定理Ⅶ·7·2进一步指出了这个并代数也是非负的。

定理Ⅶ·7·4给出了非负BCH-代数类的基数问题的一个回答：对于任意的基数$\alpha\geqslant4$，存在基数为α的非负的真BCH-代数。当$\alpha\leqslant3$时，基数为α的真BCH-代数不存在。进而，定理Ⅶ·7·5对非负BCH-代数的真类问题给出了肯定回答，即一切非负的真BCH-代数作成一个真类。我们以后称为非负的真BCH-代数类。

定理Ⅶ·8·5指出，非负性是一个可积性，也是一个逆可积性。

定理Ⅶ·9·2指出，存在基数为$\aleph_0$的非负的真BCH-代数，满足

$$|ID(X)|=|P(X)|. \tag{2}$$

而例Ⅶ·9·3则说明了，存在非负的真BCH-代数，具有单性，即满足

$$|ID(X)|=2. \tag{3}$$

定理Ⅶ·9·10还给出了关于一族非负的BCH-代数的并代数的理想的一些结果。

2. 几个简单性质

1984年4月，西北大学数学系八〇级学生黄秦安得到了非负BCH-代数的下列特征：

定理1 一个BCH-代数$\langle X;*,0\rangle$是非负的当且仅当它满足

$$(x*y)*x=0,\ \forall x\in X. \tag{4}$$

证 必要性。因有

$$(x*y)*x=(x*x)*y=0*y=0.$$

充分性。对于任意的$y\in X$，任取$x\in X$有

$$0*y=(x*x)*y=(x*y)*x=0.$$

故X是非负的。　　　　　　　　　　　Q·E·D·

黄秦安还得到下列：

定理2　非负BCH-代数的每个极大BCI-部分都是BCK-代数。

证　因为具有非负性的BCI-代数皆是BCK-代数，故得证。　　　　　　　　　　　Q·E·D·

这样，我们就知道了，在例Ⅵ·4·1中给出的BCH-代数是一个非负的真BCH-代数，其三个极大的BCI-部分实际上都是BCK-代数（在原来的∗和0下）。

3．真子类问题

我们前面已经解决过非负真BCH-代数类的真类问题和基数问题。我们还应当解决它的真子类问题。我们来作一些讨论。

第一个问题．非负真BCH-代数类是否BCH-代数类的真子类？

这个问题的回答是肯定的，我们有下列：

定理3[注392]　非负真BCH-代数类是BCH-代数类的真子类。

证　显然，非负真BCH-代数类是BCH-代数类的一个子类。由于下面的例1，我们知道，非负真BCH-代数类是BCH-代数类的一个真子类。　　　　　　　　　　　Q·E·D·

例1　设X＝{0，1}，X中的二元运算∗由下表给出：

∗	0	1
0	0	1
1	1	0

，

则⟨X；∗，0⟩是一个真BCI-代数，因而是一个BCH-代数，但

它不具有非负性，因

$$0*1=1\neq 0.$$

第二个问题. 非负的真BCH-代数类是否非负BCH-代数类的真子类？非负BCH-代数类是否BCH-代数类的真子类？

这个问题的回答是肯定的，我们有下列：

定理4[注393] 非负的真BCH-代数类是非负BCH-代数类的真子类. 非负BCH-代数类是BCH-代数类的一个真子类。

证 由于BCK-代数是非负的BCH-代数，但不是真BCH-代数，故非负的真BCH-代数类是非负BCH-代数类的真子类。由上面的例1知，非负BCH-代数类是BCH-代数类的一个真子类。 Q·E·D·

第三个问题. 非负的真BCH-代数类是否真BCH-代数类的真子类？

这个问题实际上问：是否存在不具有非负性的真BCH-代数？这个问题的回答也是肯定的，现在我们来解决这个问题。

4．不具有非负性的真BCH—代数

我们有下列结果：

定理5[注394] 一个真BCH-代数$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$和一个真BCI-代数$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$的积代数$\langle X; *, 0\rangle$是一个不具有非负性的真BCH-代数。

证 由定理Ⅶ.8.7知，$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCH-代数。由于X_2是一个真BCI-代数，故有X_2中的元素x，使$0_2*_2x\neq 0_2$。现取$z=(0_1, x)\in X$，则

$$0*z=(0_1, 0_2)*(0_1, x)=(0_1*_10_1, 0_2*_2x)$$
$$=(0_1, 0_2*_2x)\neq(0_1, 0_2)=0.$$

故$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个不具有非负性的真BCH—代数。

Q·E·D·

由此，我们可有下列：

定理 6[注395]　存在不具有非负性的真BCH-代数。

证　我们只要按定理5提出的方法具体地构造一个不具有非负性的真BCH-代数即可。

Q·E·D·

例 2　设$X_1=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$，$*_1$由下表给出：

$*_1$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	3	3
2	2	0	0	2
3	3	0	0	0,

则$\langle X_1;\ *_1,\ 0\rangle$是一个非负的真BCH-代数。

设$X_2=\{0,\ 1\}$，$*_2$由下表给出：

$*_2$	0	1
0	0	1
1	1	0,

则$\langle X_2;\ *_2,\ 0\rangle$是一个真BCI-代数。

设$\langle X;\ *,\ \theta\rangle$是$\langle X_1;\ *_1,\ 0\rangle$和$\langle X_2;\ *_2,\ 0\rangle$的积代数。则$\langle X;\ *,\ \theta\rangle$是一个不具有非负性的真BCH-代数。实际上，$X=\{\theta,\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g\}$，其中：

$\theta=(0,\ 0)$，　$a=(0,\ 1)$，　$b=(1,\ 0)$，

$c=(1,\ 1)$，　$d=(2,\ 0)$，　$e=(2,\ 1)$，

$f=(3, 0)$, $g=(3, 1)$,

而$*$由下表给出：

$*$	θ	a	b	c	d	e	f	g
θ	θ	a	θ	a	θ	a	θ	a
a	a	θ	a	θ	a	θ	a	θ
b	b	c	θ	a	f	g	f	g
c	c	b	a	θ	g	f	g	f
d	d	e	θ	a	θ	a	d	e
e	e	d	a	θ	a	θ	e	d
f	f	g	θ	a	θ	a	θ	a
g	g	f	a	θ	a	θ	a	θ.

由此表中可知，$\theta * a = a \neq 0$。从而，$\langle X; *, 0\rangle$是不具有非负性的。

注 由本节上面的这些结果，我们可以知道下列关系：

BCK-代数类∪非负真BCH-代数类

=非负BCH-代数类，

非负BCH-代数类∪不具有非负性的BCH-代数类

=BCH-代数类，

真BCI-代数类∪不具有非负性的真BCH-代数类

=不具有非负性的BCH-代数类，

而且上述三个等式的左边的两个类皆是不相交的。直观地，我们可以给出下列图7-1。

5. 推广性质和固有性质

在BCI-代数理论中，我们曾定义过推广性质和固有性质（见第四章§1的开头一段）。在BCH-代数理论中也可定义推广性质和固有性质，即有下列：

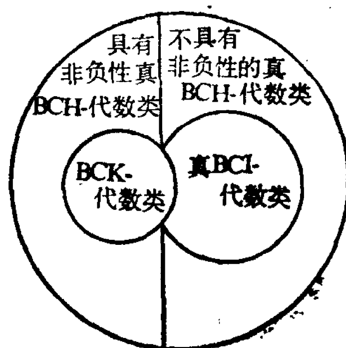


图 7-1

定义 1[注396] 设P是一个（类）性质。

如果在BCI-代数类中具有有P的BCI-代数，而在真BCH-代数类中也具有有P的BCH-代数，那么称P为BCH-代数理论中的一个推广性质。

如果在真BCH-代数类中具有有P的BCH-代数，且如果BCI-代数具有P则必为BCK-代数（特别地，成为一个平凡的BCK-代数），那么称P为BCH-代数理论中的一个固有性质。

由这个定义，我们可有下列：

定理 7[注397] 非负性是BCH-代数理论的一个固有性质，而不具有非负性的性质是BCH-代数理论的一个推广性质。

Q.E.D.

§11 有界的BCH-代数

有界性是BCK-代数理论中研究的一个重要性质。李丹[45]中指出了，有界BCI-代数就是有界BCK-代数，因此，在BCI-代数理论中没有必要研究有界性。但是，在较BCI-代数类更大

的BCH-代数类中却完全有必要研究有界性，而且对比BCI-代数来讲，有界性正是BCH-代数理论中一个“固有的性质”。在这一节中，我们来研究有界的BCH-代数。

1．有界BCH-代数的概念

我们先引入下列概念：

定义1〔注398〕 如果一个BCH-代数〈X，∗，0〉中存在元素1，使对于任意的$x\in X$，有

$$x\leqslant 1, \qquad (\forall x\in X) \tag{1}$$

则称〈X，∗，0〉是有界的BCH-代数，而1被称为X的一个单位元。

例1 任何有界的BCK-代数是一个有界的BCH-代数。

要研究有界的BCH-代数，自然要提出一个问题：是否存在有界的真BCH-代数？这个问题的回答是肯定的，即有下列：

定理1〔注399〕 存在有界的真BCH-代数。

证 见下列例2和例3。 Q.E.D.

例2 设X={0，1，2，3}，X中的二元运算∗由下表给出：

∗	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	3	3
2	2	0	0	2
3	3	0	0	0，

则〈X，∗，0〉是一个有界的真BCH-代数，而1是X的单位元。

例3 设X={0，1，2，3}，X中的二元运算∗由下表给出：

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	3	0	3
3	3	0	0	0,

则〈X；*，0〉是一个有界的真BCH-代数，而2是X的单位元。

注1 存在真BCH-代数，它不是有界的，见下列例4.

例4 设X={0，1，2，3}，X中的二元运算*由下表给出：

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	0	0	2
3	3	3	0	0.

则〈X；*，0〉是一个真BCH-代数，但不是有界的。

2．有界BCH-代数的性质

类似于定理Ⅰ·3·1的证明，我们有下列：

定理2〔注400〕 设1是有界BCH-代数〈X；*，0〉的一个单位元，则

$$A(1)=X. \quad (2)$$

反之，如果BCH-代数〈X；*，0〉中元素$x\in X$满足

$$A(x)=X, \quad (3)$$

则x是它的单位元，且X是有界的。 Q.D.E.

由H-2易知成立下列：

定理 3 [注401]　有界BCH-代数中单位元唯一。　Q.E.D.

定理 4 [注402]　在BCH-代数$\langle X; *, 0\rangle$中记

$$x*(x*y)=y\wedge x. \tag{4}$$

如果X是有界的，则$\forall x\in X$有

$$1\wedge x=x. \tag{5}$$

证　因$1\wedge x=x*(x*1)=x*0=x$。　Q.E.D.

3．算子N

类似于有界BCK-代数中的算子N，在有界BCH-代数中也可定义算子N，即下列：

定义 2 [注403]　在有界BCH-代数$\langle X; *, 0\rangle$中，设1是它的单位元，记

$$N(x)=Nx=1*x. \tag{6}$$

注 2　N是一个算子。

$$\left.\begin{array}{l}N: X\to X,\\ x\longmapsto 1*x.\end{array}\right\} \tag{7}$$

例 5　如例2中，

$N(0)=1$，　$N(1)=0$，　$N(2)=3$，$N(3)=3$。

我们有下列结果：

定理 5 [注404]　在有界BCH-代数$\langle X; *, 0\rangle$中成立：

1）$N1=0$，$N0=1$。

2）$NNx\leqslant x$。

3）$Nx*y=Ny*x$。

4）$x\wedge x=NNx$。

证　见定理Ⅰ·3·8的证明。　Q.E.D.

定义 3 [注405]　在有界BCH-代数$\langle X; *, 0\rangle$中如果元素$x\in X$满足　$Nx=x$。　(8)

则称之为算子N的不动点。〈X; ∗, 0〉中一切不动点的集合被称为算子N的不动点集，记为N(X)。

例 6 例2中，N(X) = {3}。

定义 4[注406] 设〈X; ∗, 0〉为一个有界的BCH-代数。如果 $x\in X$，满足

$$NNx = x, \tag{9}$$

则称 x 为X的一个对合元素。X的一切对合作成的集合称为X的对合集，记为I(X)。

显然，

$$NN0 = 0, \quad NN1 = 1.$$

因此，有下列：

定理6[注407] 设〈X; ∗, 0〉是一个有界的BCH-代数，则

$$0\in I(X), \quad 1\in I(X).$$

因而 $|I(X)|\geqslant 2$。 Q·E·D·

4．有界BCH-代数类

我们现在来讨论一切有界的BCH-代数作成的类——有界BCH-代数类。当然，我们应当考虑它的真类问题、基数问题和真子类问题。我们有下列结果：

定理7[注408] 对于任意的基数$\gamma>0$存在基数为γ的有界BCH-代数。从而，有界BCH-代数类是一个真类。有界BCH-代数类是BCH-代数类的一个真子类。

证 由于有界BCK-代数一定是有界BCH-代数，从而由定理Ⅰ·3·7知，本定理的第一个结论和第二个结论成立。有界BCH-代数类显然是BCH-代数类的一个子类，又因存在非有界的BCH-代数（见例4），所以有界BCH-代数类是BCH-代数类的一个真子类。 Q·E·D·

实际上，由例1和例4还可以知道成立下列：

定理8[注409] 有界真BCH-代数类是有界BCH-代数类的真子类。有界真BCH-代数类是真BCH-代数类的真子类。

Q·E·D·

对于有界真BCH-代数类的基数问题和真类问题，还有待于我们进一步去解决。

由于在BCK-代数类中我们研究过有界性，而在BCH-代数理论中我们没有必要研究有界性，因此我们有下列：

定理9[注410] 有界性是BCH-代数理论的一个固有性质。不具有有界性的性质是BCH-代数理论的一个推广性质。

Q·E·D·

5．积代数

类似于定理Ⅰ·10·7的证明，我们可以得到下列结果：

定理10[注411] 有界性是（BCH-代数类中的）一个可积性，也是一个逆可积性。 Q·E·D·

下面我们要利用这个结果来讨论有界真BCH-代数类的基数问题和真类问题。我们先给出几个引理。

引理1 设$X_2=\{0_2, a, b, c\}$，$*_2$由下表给出：

$*_2$	0_2	a	b	c
0_2	0_2	0_2	0_2	0_2
a	a	0_2	c	c
b	b	0_2	0_2	b
c	c	0_2	0_2	0_2

，

则$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$是一个有界的真BCH-代数，$a$是它的单位元。（参看例1）。 Q·E·D·

引理 2[注412] 设$\langle X_1;\ *_1, 0_1\rangle$是一个任意的有界BCK-代数。命$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是$\langle X_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$和引理 1 中的$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$的积代数。则$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是有界的真BCH-代数。

证 由定理Ⅶ.8.7，因$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$是真BCH-代数，故$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是真BCH-代数。由于$X_1$和$X_2$都是有界的，由定理10知，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是有界的真BCH-代数。 Q.E.D.

引理3[注413] 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是两个BCH-代数$\langle X_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$和$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$的积代数。

1）如果$|X_1| = m < \aleph_0$，$|X_2| = n < \aleph_0$，则$|X| = mn$。

2）如果$|X_1| = m \geqslant \aleph_0$，$|X_2| = n < \aleph_0$，则$|X| = m$。

3）特别地，如果$|X_1| = m \geqslant \aleph_0$，$|X_2| = 4$，则$|X| = m$。

4）如果$|X_1| = m \geqslant \aleph_0$，$|X_2| = n \geqslant \aleph_0$，则

$|X| = \max\{m,\ n\}$。

上面的$|X|$表示集合X的基数。

证 实际上据两个集合的笛卡尔积而知。 Q.E.D.

引理4[注414] 设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是BCH-代数$\langle X_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$和BCH-代数$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$的积代数，而$\langle X';\ *',\ 0'\rangle$是BCH-代数$\langle X_1';\ *_1',\ 0_1'\rangle$和BCH-代数$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$的积代数，且$|X_1| > |X_1'| \geqslant \aleph_0$，$|X_2| < \aleph_0$，则$|X| > |X'|$，从而$\langle X;\ *,\ 0\rangle$与$\langle X';\ *',\ 0'\rangle$不同。

证 由引理 3 的 2）知，$|X| = |X_1| > |X_1'| = |X'|$。由于$|X| > |X'|$，故$\langle X;\ *,\ 0\rangle$与$\langle X';\ *',\ 0'\rangle$不同。 Q.E.D.

现在，我们可以来证明下列：

定理11[注415] 对于任意的基数$\gamma \geqslant \aleph_0$，存在基数为$\gamma$的有界真BCH-代数。从而，有界真BCH-代数类是一个真类。

证 由定理Ⅰ.3.7，对于任意的基数$\gamma \geqslant \aleph_0$，我们取一个基

数γ的BCK-代数$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$；再取引理1中的真BCH-代数$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$，$|X_2|=4$。$\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$和$\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$的积代数为$\langle X; *, 0\rangle$，则$\langle X; *, 0\rangle$是一个有界的真BCH-代数（由引理2知），且$|X|=\gamma$（由引理3的2）知）。由引理4知，对于不同的$\gamma\geqslant\aleph_0$这样的$\langle X; *, 0\rangle$是不同的。因此本定理的两个结论得证。 Q.E.D.

我们还有下列结果：

定理12[注416] 对于$\gamma=2^n$（n为$\geqslant 2$的自然数），存在基数为γ的有界真BCH-代数。

证 当$n=2$时，我们可取例2中的有界真BCH-代数$\langle X; *, 0\rangle$。

当$n>2$时，命$m=n-2$。我们先取$Y=\{0_1, a\}$，$*_1$为：

$*_1$	0_1	a
0_1	0_1	0_1
a	a	0_1

则$\langle Y; 0_1, a\rangle$是一个二阶的有界的BCK-代数。现在令：

$$Z=X\times\underbrace{Y\times Y\times\cdots\times Y}_{m},$$

$\langle Z; *', 0'\rangle$表示积代数，则$\langle Z; *', 0'\rangle$是有界的真BCH-代数，且基数$|Z|=4\times 2^m=2^{m+2}=2^n$。 Q.E.D.

6．有界BCH-代数的非负性和同态不变性

从表面上看，非负性和有界性简直是两个极端。事实上，一个非负的BCH-代数$\langle X; *, 0\rangle$是指满足

$$0\leqslant x, \quad \forall x\in X. \tag{10}$$

因此，在X中有一个"$\leqslant$"下的最小元0。而一个有界的BCH-

代数〈X；$*$，0〉中有一个单位元1，使得

$$x \leqslant 1, \qquad \forall x \in X. \tag{1}$$

因此，X中有一个"$\leqslant$"下的最大元1．1984年4月，西北大学数学系八〇级学生曲安京指出了有界性与非负性的关系，即得到了下列：

定理13 一个BCH-代数有界，则必非负。

证 设〈X；$*$，0〉是任意的一个有界BCH-代数，则对于任意的$x \in X$，由H-3知，若1是X中的单位元，

$$0 * x = (0 * 1) * x = (0 * x) * 1 = 0.$$

因此，〈X；$*$，0〉是有界的。　Q·E·D·

注意，定理13的逆不真，即存在非负的但非有界的（真）BCH-代数，如例4中的真BCI-代数是非负的，但不是有界的。因此，我们有下列：

定理14[注417] 有界BCH-代数类是非负BCH-代数类的一个真子类。有界真BCH-代数类是非负真BCH-代数类的一个真子类。　Q·E·D·

曲安京还得到了下列：

定理15 有界性是一个同态不变性。

证 设f是有界BCH-代数〈X；$*$，0〉到BCH-代数〈Y；人，θ〉上的一个同态，1是X中的单位元。设$1_Y = f(1)$，则$1_Y \in Y$。对于任意的$y \in Y$，任取$x \in X$，使$f(x) = y$。由于

$$x * 1 = 0,$$

故

$$y \curlywedge 1_Y = f(x) \curlywedge f(1) = f(x * 1) = f(0) = \theta,$$

从而$y \leqslant 1_Y$。所以，〈Y；人，θ〉是有界的。　Q·E·D·

1984年5月西北大学数学系八〇级学生张仲选利用定理13进

一步得到下列结果：

定理15 如果$\langle X; *, 0\rangle$是一个任意的有界的BCH-代数，那么对于任意的$a, b\in X$，$A(a, b)$一定是X的子代数。

证 因定理13，则$0 = a*a\leqslant b$，故$a\in A(a, b)$。因此，$A(a, b)$非空。设x, y是$A(a, b)$中的任二元素，则$x*a\leqslant b$，$y*a\leqslant b$，即$(x*a)*b = 0$，$(y*a)*b = 0$。于是，$((x*y)*a)*b = ((x*a)*b)*y = 0*y = 0$，最后的等式成立是由于定理13。这样，$x*y\in A(a, b)$。故$A(a, b)$是X的一个子代数。 Q·E·D·

§12 拟可换的BCH-代数

在BCK-代数理论和BCI-代数理论中都研究过拟可换性。在BCH-代数理论中也可研究拟可换性，也就是说，拟可换性在BCH-代数理论中是一个推广性质。我们这一节来研究BCH-代数理论中的拟可换性。

1．拟可换BCH-代数的概念

1984年3月作者和蒋彦一起引入了拟可换的BCH-代数的概念。我们先介绍这个概念。

定义1〔注418〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCH-代数。变量x和$y(\in X)$的多项式$Q_{m,n}(x, y)$ $(m, n\in\omega)$归纳地定义于下：

$$\left.\begin{aligned}&Q_{0,0}(x,y)=x*(x*y),\\&Q_{m+1,n}(x,y)=Q_{m,n}(x,y)*(x*y),\\&Q_{m,n+1}(x,y)=Q_{m,n}(x,y)*(y*x).\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

定义2〔注419〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCH-代数。若存在一组非负整数i, j, m, n，使对于X中的任意两个元素x和y都成立

$$Q_{i,j}(x,y)=Q_{m,n}(y,x), \tag{2}$$

则X叫做一个$(i,j;m,n)$型拟可换BCH-代数。

我们先给出几个平凡的例子。

例1 任意的$(i,j;m,n)$型拟可换的BCK-代数都是$(i,j;m;n)$型拟可换的BCH-代数。

例2 任意的$(i,j;m,n)$型拟可换的BCI-代数都是$(i,j;m,n)$型拟可换的BCH-代数。

我们要讨论拟可换的BCH-代数的关键在于要找出拟可换的真BCH-代数。1984年3月西北大学数学系八〇级学生蒋彦得到了下列结果：

定理1 存在拟可换的真BCH-代数。

证 下列例3中给出一个（0，1；0，1）型拟可换的真BCH-代数。 Q·E·D·

例3 设X＝{0，1，2，3}，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	0	0	2
3	3	3	0	0

则$\langle X;*,0\rangle$是一个真BCH-代数。

由于

$$Q_{0,1}(x,y)=(x*(x*y))*(y*x),$$
$$Q_{0,1}(y,x)=(y*(y*x))*(x*y),$$

我们作下列验算：

x	y	(x*(x*y))*(y*x)	(y*(y*x))*(x*y)
0	0	0	0
0	1	0	0
0	2	0	0
0	3	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1
1	2	0	0
1	3	0	0
2	0	0	0
2	1	0	0
2	2	2	2
2	3	0	0
3	0	0	0
3	1	0	0
3	2	0	0
3	3	3	3

由此可知，〈X；∗，0〉是一个（0，1；0，1）型拟可换的真BCH-代数。

2．拟可换BCH-代数的性质

拟可换的BCH-代数有以下主要性质：

定理 2〔注420〕　设〈X；∗，0〉是一族BCH-代数{〈X_α；$*_\alpha$，0_α〉：$\alpha\in I$}的积代数。则〈X；∗，0〉是$(i,j;m,n)$型拟可换的当且仅当对于任意的$\alpha\in I$，〈X_α；$*_\alpha$，0_α〉是$(i,j;m,n)$型拟可换的。

证　类似于定理Ⅳ·1·7的证明。　　Q·E·D·

由此立即得到下列：

推论〔注421〕　同型拟可换性是可积性和逆可积性。Q.E·D·

类似于定理Ⅳ·1·16的证明，我们有下列：

定理 3〔注422〕 在BCH-代数理论中，“具有$(i,j;m,n)$型拟可换性”的性质是一个遗传性。

Q·E·D·

类似于定理Ⅳ·1·17的证明，可有下列：

定理 4〔注423〕 在BCH-代数理论中，“具有$(i,j;m,n)$型拟可换性”的性质是一个同态不变性。

Q·E·D·

3．拟可换BCH-代数簇

$(i,j;m,n)$型拟可换BCH-代数有下列特征：

定理 5〔注424〕 一个（2，0）型的代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是$(i,j;m,n)$型拟可换的BCH-代数的充要条件是它满足以下等式：

1）$(x*y)*z=(x*z)*y$，$\forall x,y,z\in X$，（3）

2）$x*x=0$，$\forall x\in X$，（4）

3）$x*0=x$，$\forall x\in X$，（5）

4）$Q_{i,j}(x,y)\doteq Q_{m,n}(y,x)$，$\forall x,y\in X$。（2）

证 必要性是显然的。现证充分性。设x和y是X中的任二元素，满足

$$x*y=0,\quad y*x=0;$$

由这个条件及（2）和（5）可知

$$x=Q_{i,j}(x,y)=Q_{m,n}(y,x)=y.$$

从而H-2成立。再加上H-1（即（4））和H-3（即（3））是已知的，因此$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个BCH-代数。

Q·E·D·

我们也有拟可换BCH-代数的以下特征：

定理 6〔注425〕 一个（2，0）型的代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是$(i,$

$j;m,n)$ 型的拟可换的BCH-代数的充要条件是它满足（3），（5），（2）和

$$(x*(x*y))*y=0, \quad \forall x,y\in X. \qquad (6)$$

证 必要性。我们利用

（3），（4），（5），（2）⇒（6）。

其实，由（3）和（4）立即得到：

$$(x*(x*y))*y=(x*y)*(x*y)=0.$$

充分性，只要证（4）就行了。事实上，在（6）中命$y=0$，由（5）则有：

$$0=(x*(x*0))*0=x*(x*0)=x*x.$$

Q·E·D·

由定理5或定理6可知成立：

定理7〔注426〕 对于任意的非负整数i,j,m,n（例如0，1，0，1或1，1，1，1），一切$(i,j;m,n)$型拟可换的BCH-代数作成的类是一个簇，称为拟可换BCH-代数簇。 Q·E·D·

4．有限BCH-代数

类似于有限BCK-代数和有限BCI-代数的概念，我们在这里引入有限BCH-代数的概念，即下列：

定义3〔注427〕 一个有限的BCH-代数是元素个数有限的BCH-代数，即BCH-代数$\langle X;*,0\rangle$使得$1\leqslant|X|<\aleph_0$。

显然，一切有限的BCK-代数和一切有限的BCI-代数皆是有限的BCH-代数。例3中给出的BCH-代数$\langle X;*,0\rangle$是一个有限的真BCH-代数。下面我们再给出一个有限的拟可换的真BCH-代数的例子。

例4 设$X=\{0,1,2,3\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	1	0	2
3	3	3	0	0，

则〈X；∗，0〉是一个4阶的、（1，1；1，1）型拟可换的真BCH-代数。

我们在第二章和第四章已经讲过，凡是有限的BCK-代数皆是拟可换的，但是迄今我们还不知道，有限的BCI-代数是否一定是拟可换的。自然，类似的问题对于有限BCH-代数来说也是应当予以考虑的，即我们应提出下列：

问题1 有限的BCH-代数一定是拟可换的吗？

蒋彦在1984年3月否定地回答了这个问题，给出下列：

定理8 有限BCH-代数不必是拟可换的。

证 见下面的例5。 Q.E.D.

例5 设X＝{0，1，2，3}，X中的二元运算∗由下表给出：

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	3	3
2	2	0	0	2
3	3	0	0	0，

则〈X；∗，0〉是一个真BCH-代数。

我们来说明，它不是拟可换的。容易算出以下事实：

1）对于 $0 \leqslant i,j,m,n \leqslant 1$ 的情形有：

$$Q_{0,0}(1,2)=3 \neq Q_{0,0}(2,1)=2,$$

$$Q_{0,0}(1,2)=3 \neq Q_{0,1}(2,1)=2,$$

$$Q_{0,0}(1,2)=3 \neq Q_{1,0}(2,1)=2,$$

$$Q_{0,0}(1,2)=3 \neq Q_{1,1}(2,1)=2,$$

$$Q_{0,1}(1,2)=3 \neq Q_{0,1}(2,1)=2,$$

$$Q_{0,1}(1,2)=3 \neq Q_{1,0}(2,1)=2,$$

$$Q_{0,1}(1,2)=3 \neq Q_{1,1}(2,1)=2,$$

$$Q_{1,0}(2,1)=2 \neq Q_{1,0}(1,2)=0,$$

$$Q_{1,0}(1,2)=0 \neq Q_{1,1}(2,1)=2,$$

$$Q_{1,1}(1,2)=0 \neq Q_{1,1}(2,1)=2.$$

因此，〈X； ∗， 0〉不是低型拟可换的。

2）进一步可以算出下列等式：

$$Q_{0,1}(x,y)=Q_{0,2}(x,y)=\cdots=Q_{0,n}(x,y)=\cdots,\quad n\geqslant 1,$$

$$Q_{1,0}(x,y)=Q_{2,0}(x,y)=\cdots=Q_{m,0}(x,y)=\cdots,\quad n\geqslant 1,$$

$$Q_{m,n}(x,y)=Q_{1,1}(x,y),\qquad m\geqslant 1,\ n\geqslant 1.$$

这样，我们知道，这个四阶的真BCH-代数不是拟可换的。

现在，我们顺便说一下低型，高型及纯高型的概念。

定义 4〔注428〕 设〈X； ∗， 0〉是一个 $(i,j;m,n)$ 型拟可换的BCH-代数，如果

$$0 \leqslant \max\{i,j,m,n\} \leqslant 1,$$

则称其为低型的；如果

$$\max\{i,j,m,n\} \geqslant 2,$$

则称其为高型的；如果〈X； ∗， 0〉是高型的拟可换的BCH-代数，但不是低型的，则称其为纯高型的拟可换的BCH-代数。

我们在例 3 和例 4 中给出的拟可换的真BCH-代数都是低型

的（例4还是（2，1；2，1）型的，但不是纯高型的）．自然地，我们要在这里提出下列尚未解决的一个问题：

问题2〔注429〕 存在纯高型的拟可换的真BCH-代数吗？

欢迎有兴趣的读者探索和研究这个问题．

§13 具有条件(S)的BCH-代数

在BCK-代数理论中和在BCI-代数中我们都介绍过具有条件(S)的性质．现在，我们在BCH-代数理论中也来研究这种性质．

1．具有条件(S)的BCH-代数的概念

我们先给出下列：

定义1〔注430〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCH-代数．如果对于任意的$a, b\in X$，存在满足

$$x*a\leqslant b, \tag{1}$$

的一个最大的元素x，记为$a\circ b$，亦即集合

$$A(a,b)=\{x\in X: x*a\leqslant b\} \tag{2}$$

在X中有最大元素

$$a\circ b=\sup A(a,b)\in A(a,b), \tag{3}$$

那么称$\langle X; *, 0\rangle$为具有条件(S)的．

也可从映射的观点来看待这个定义，即

$$\left.\begin{array}{l} \circ : X\times X\longrightarrow X,\\ (a,b)\longmapsto a\circ b. \end{array}\right\} \tag{4}$$

我们给出具有条件(S)的BCH-代数的几个例子．

例1 任何具有条件(S)的BCK-代数是具有条件(S)的BCH-代数．

例 2 任何具有条件（S）的BCI-代数是具有条件（S）的BCH-代数。

仅仅知道例 1 和例 2 中给出的事实是不行的。在BCH-代数理论中研究具有条件（S）的性质的关键在于必须首先解决下列：

问题 1 是否存在一个真 BCH-代数，它具有条件（S）的性质？

下面，我们来给这个问题一个肯定的回答：

定理 1〔注431〕 存在具有条件（S）的真BCH-代数。

证 见下列例 3。 Q·E·D·

例3 设$X=\{0, 1, 2, 3\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	3	3
2	2	0	0	2
3	3	0	0	0，

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个真BCH-代数。我们指出，它具有条件（S）。事实上，我们可以得到下表：

$\circ$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	1	1
2	2	1	1	1
3	3	1	1	1。

由例2和例3可知，成立下列：

定理2〔注432〕 在BCH-代数理论中，具有条件（S）的性质是一个推广性质。 Q·E·D·

我们还要指出下列事实：

定理3〔注433〕 存在不具有条件（S）的真BCH-代数。

证 见下列例4。 Q·E·D·

例4 设X＝{0，1，2，3}，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	2	0	3
3	3	3	0	0，

则⟨X；$*$，0⟩是一个真BCH-代数，且不具有条件（S）。事实上，$A(1,3)=\{0,1,3\}$，如下图所示：

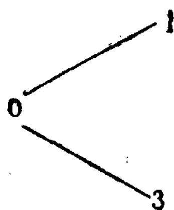


图7—2

其中：$0\leqslant 1$，$0\leqslant 3$，但1与3不可比较。因此集合$A(1,3)$中没有最大元素。从而，⟨X；$*$，0⟩不具有条件（S）。

为了方便起见，我们先引入下列：

定义2〔注434〕 一切具有条件(S)的BCH-(BCK-，BCI-)代数作成类称为(S)H-（对应地，(S)K-，(S)I-）类。

我们有下列结果：

定理 4〔注435〕 成立下式：

(S)K-类⊂(S)I-类⊂(S)H-类。

证 第一个真包含式在第四章§3中已述明，第二个真包含式成立是由于例2和例3。 Q·E·D·

由定理Ⅳ·3·6可知，成立下列：

定理 5〔注436〕 对于任意的基数$\gamma>0$存在一个具有条件(S)的BCH-代数。因此，(S)H-类是一个真类。(S)H-类是BCH-代数类的一个真子类。

证 1）由定理Ⅳ·3·6可知成立本定理的第一个结论。

2）由第一个结论可知成立第二个结论。

3）显然，(S)H-类⊑BCH-代数类。由于例4，这个包含是真包含。 Q·E·D·

2．具有条件（S）的BCH-代数的性质

类似于定理Ⅰ.6.7的证明，我们可以得到下列：

定理 6〔注437〕 具有条件(S)的任何BCH-代数$\langle X; *, 0\rangle$是关于$\circ$的一个交换的广群，且以$\circ$为恒等元，即(X, 0)满足下列条件：

1）$x\circ y\in X$, $\forall x, y\in X$, (5)

2）$x\circ y=y\circ x$, $\forall x, y\in X$, (6)

3）$0\circ x=x\circ 0=x$, $\forall x\in X$. (7)

Q·E·D·

类似于定理Ⅰ·10·12.和定理Ⅰ·10·13的证明我们有下列：

定理 7〔注438〕 具有条件（S）的性质是一个可积性，也是一个逆可积性。 Q·E·D·

为证这个定理需用到下列：

引理 1〔注439〕 设$\langle X; *, 0\rangle$是一族BCH-代数$\langle X_\alpha; *_\alpha, 0_\alpha\rangle$ ($\alpha\in I$) 的积代数。如果f和g是X的任二元素，则$f\leqslant g$ iff$\forall \alpha\in I$, $f(\alpha)\leqslant g(\alpha)$。

证 参看引理Ⅱ·10·4。 Q·E·D·

3．具有条件（S）的真BCH-代数类

对于(S)H-类的真类问题、基数问题和真子类问题，定理5已作出了回答。但是，这只是对于整个(S)H-类而言的，而且是建立在(S)I-类的同类型问题的基础上的。我们自然要提出具有条件（S）的真BCH-代数类的真类问题、基数问题和真子类问题，即下列：

问题 2 具有条件(S)的真BCH-代数类是一个真类吗？对于任意的基数$\gamma>0$存在具有条件(S)的真BCH-代数吗？具有条件（S）的真BCH-代数类是否具有条件（S）的BCH-代数类的一个真子类？具有条件（S）的真BCH-代数类是否真BCH-代数类的一个真子类？

我们先来回答真子类问题，即有下列：

定理 8〔注440〕 具有条件(S)的真BCH-代数类是具有条件（S）的BCH-代数类的一个真子类。具有条件（S）的真BCH-代数类是真BCH-代数类的一个真子类。

证 显然，具有条件(S)的真BCH-代数类$\sqsubseteq$具有条件(S)的BCH-代数类。由于存在具有条件（S）的BCK-代数或BCI-代数，故具有条件（S）的真BCH-代数类是具有条件（S）的BCH-代数类的一个真子类。

显然，具有条件（S）的真BCH-代数类$\sqsubseteq$真BCH-代数类。由于例4，我们可以知道，具有条件（S）的真BCH-代数类是真BCH-代数类的一个真子类。 Q·E·D·

现在，我们对于基数问题有下列结果：

定理 9〔注441〕 对于任意的基数 $\gamma \geqslant \aleph_0$，存在基数为 γ 的、具有条件（S）的真BCH-代数。

证 对于任意的基数 $\gamma \geqslant \aleph_0$，由定理Ⅳ·3·6，我们任取一个基数为$\gamma$的具有条件（S）的BCI-代数$\langle X_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$。我们再记例3中的具有条件（S）的真BCH-代数为$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$。设$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是$\langle X_1;\ *_1,\ 0_1\rangle$和$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$的积代数。由定理Ⅶ·8·7知，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是一个真BCH-代数（因$\langle X_2;\ *_2,\ 0_2\rangle$是真BCH-代数）．由定理7知，积代数$\langle X;\ *,\ 0\rangle$是具有条件（S）的。由引理Ⅵ·11·3的3）知，$|X| = \gamma$.因此，$\langle X;\ *,\ 0\rangle$正是基数为$\gamma$的、具有条件（S）的真BCH-代数。 Q·E·D·

由这个定理我们立即可以对真类问题作出肯定回答，即下列：

定理10〔注442〕 具有条件(S)的真BCH-代数类是一个真类。

Q·E·D·

显然，对于基数问题定理9没有给出全部回答，因为当γ为有限基数的情形，我们还不知道是否存在基数为γ的具有条件（S）的真BCH-代数．现在，我们对于一种情况作一些讨论。

当$\gamma \leqslant 3$时，由于不存在基数为γ的真BCH-代数，从而也不存在基数为γ的、具有条件（S）的真BCH-代数。

当$\gamma = 4$时，例3给出了阶为4的具有条件（S）的真BCH-代数$\langle X';\ *',\ 0'\rangle$。

当$\gamma = 2^n$，$n > 2$时，设$m = n - 2$，由于$X_2(I)$是一个二阶的、具有条件（S）的真BCH-代数，则积代数

$$X = \underbrace{X_2(I)\times X_2(I)\times\cdots\times X_2(I)}_{m}\times X'$$

是γ阶的、具有条件（S）的真BCH-代数。

由此，我们得到了下列：

定理11〔注443〕 对于任意的基数$\gamma=2^n, n\geqslant 2$，存在阶为γ的、具有条件（S）的真BCH-代数。　　Q·E·D·

当然，这个结果还没有完全解决对于$\gamma\geqslant 4$的有限基数的情形。因此，自然地要提出下列问题：

问题3〔注444〕 当γ为>4，且$\gamma\neq 2^n$的自然数时，存在基数γ的具有条件（S）的真BCH-代数吗？这是作者在1983年11月提出的一个问题。

4．具有条件（S）的有界的BCH-代数

我们现在来讨论具有条件（S）的BCH-代数类的一个子类——具有条件（S）的有界BCH-代数类。先看下例。

例5 例3中给出的具有条件（S）的真BCH-代数是有界的，最大元（即单位元）是1．

例6 例4中给出的真BCH-代数，不具有条件（S）的性质，但是它是有界的，单位元是2．

例7 设$\langle X_1; *_1, 0\rangle$是例3中给出的具有条件（S）的真BCH-代数，$X_2(I)$是具有条件（S）的二阶的真BCI-代数。设$\langle X; *, 0\rangle$是$\langle X_1; *, 0\rangle$和$X_2(I)$的积代数（见例Ⅶ·10·2），则$\langle X; *, 0\rangle$是具有条件（S）的真BCH-代数（由定理7和定理Ⅶ·8·7知），且它不是有界的（它甚至不是非负的）．

例8 设$X=\{0, 1, 2, 3\}$，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	0	0	2
3	3	3	0	0,

则⟨X; $*$, 0⟩是一个真BCH-代数. ⟨X; $*$, 0⟩显然不是有界的（因上面的乘法表容易看出）. 此外, ⟨X; $*$, 0⟩还不具有条件（S）的性质. 因

$$A(2, 3)=\{0, 1, 2, 3\}$$

中没有最大元素. 注意, X中元素间按"≤"不能构成一个半序, 如下图所示:

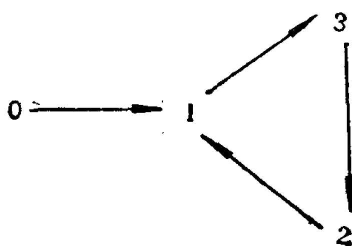


图 7—3

其中箭头所示方向是按≤由小到大的方向, 如"2→1"表示"2≤1".

由上面四个例子我们可以得到下列:

定理12[注445] 具有条件（S)的有界真BCH-代数类是具有条件（S）的真BCH-代数类的真子类, 也是有界真BCH-代数类的真子类. 存在不具有条件（S）的、也非有界的、真BCH-代数, 因此,

$$\text{真BCH-代数类} - \left(\begin{matrix}\text{具有条件（S）的}\\ \text{真BCH-代数类}\end{matrix} \cup \begin{matrix}\text{有界的真}\\ \text{BCH-代数类}\end{matrix}\right) \neq \phi.$$

Q.E.D.

1984年5月，西北大学数学系八〇级学生张仲选研究了具有条件（S）的有界的BCH-代数，得到了几个结果．他把定理Ⅰ·6·7的推论推广到BCH-代数，得到了下列：

定理13 如果⟨X；∗，0⟩是具有条件（S）的有界BCH-代数，那么对于任意的$x \in X$成立：

$$x \circ 1 = 1 \circ x = 1, \qquad x \circ Nx = 1. \tag{8}$$

证 类似于定理Ⅰ·6·7的推论的证明． Q.E.D.

张仲选还得到下列：

定理14 如果⟨X；∗，0⟩是具有条件（S）的有界BCH-代数，那么对于任意的x和$y \in X$有

$$x \leqslant x \circ y, \qquad y \leqslant x \circ y. \tag{9}$$

证 由定理Ⅶ·11·13知有：

$$(x * x) * y = 0 * y = 0.$$

故$x \in A(x, y)$．由于X具有条件(S)，$x \circ y$是$A(x, y)$中的最大元素，从而$x \leqslant x \circ y$．

其次，由于

$$(y * x) * y = (y * y) * x = 0 * x = 0,$$

从而$y \in A(x, y)$，故$y \leqslant x \circ y$． Q.E.D.

注1 上面证明的第二部分也可由定理6的2）及所证过的第一式得出．

5．BCH-代数的一点有界化

1984年4月曲安京把BCK-代数的一点有界化推广到BCH-

代数，得到下列：

定理15 设⟨X；$*$，0⟩是一个非负的BCH-代数，$a\overline{\in}$X。命

$$X' = X \cup \{a\},$$

$$*' : x*'y = \begin{cases} x*y, & x, y \in X \\ a, & x = a,\ y \neq a, \\ 0, & y = a, \end{cases}$$

则⟨X′；$*'$，0⟩是一个有界的BCH-代数，且称之为⟨X；$*$，0⟩的一点有界化。

证 容易验证⟨X′；$*'$，0⟩是一个BCH-代数。X′的有界性是由于：

$$x*'a = 0, \qquad \forall x \in X'.$$

Q·E·D·

注 2 在验证H-3成立时要用到X的非负性。定理 15 中X的非负性条件是必不可少的。

我们还可以进一步得到下列：

定理16[注446] 条件同定理15。如果⟨X；$*$,0⟩是具有条件（S）的，则它的一点有界化⟨X′；$*'$，0⟩也是具有条件（S）的。反之亦然。

证 设⟨X；$*$，0⟩具有条件（S），现证它的一点有界化⟨X′；$*'$，0⟩也具有条件（S）。设x和y是X′中的任二元素。由于X′有界，故A(x, y)非空。分以下几种情形讨论之。

1） $x \in X$，$y \in X$。我们断言

$$A_X(x, y) = A_{X'}(x, y). \tag{10}$$

显然有$A_X(x, y) \subseteq A_{X'}(x, y)$。其次，$a \overline{\in} A_{X'}(x, y)$。这是因为：

$$(a*'x)*'y=a*'y=a\neq 0.$$

这就证得了（10）．由此，$x\circ_{X'}y=x\circ_{X}y$。

2）$x\in X$，　　$y=a$。则有

$$(a*'x)*'a=a*'a=0.$$

故 $a\in A(x,a)$。从而 $x\underset{X'}{\circ}a=a$。

3）$x=a,y\in X$。　　则

$$a\underset{X'}{\circ}y=y\underset{X'}{\circ}a=a.$$

4）$x=a$，$y=a$。则

$$(a*'a)*'a=0*'a=0.$$

故 $a\in A(a,a)$，从而 $a\underset{X'}{\circ}a=a$。

这样，$x\underset{X'}{\circ}y$ 总存在，所以$\langle X';*',0\rangle$具有条件（S）．

现证其逆。设非负BCH-代数$\langle X;*,0\rangle$的一点有界化$\langle X';*',0\rangle$具有条件（S）的性质。当 x,y 是 X 中的任二元素时，由于（10）成立，仍有

$$x\underset{X}{\circ}y=x\circ_{X'}y\in X.$$

所以，$\langle X;*,0\rangle$具有条件（S）的性质。

Q·E·D·

张仲选利用定理 16 的第一个结论作了如下计算：

由于例 3 中给出了一个四阶的非负的具有条件（S）的性质的真BCH-代数，记为X_4，它的一点有界化记为X_5，仍是一个非负的具有条件（S）的真BCH-代数，是五阶的，其乘法表为：

$*_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	3	3	0
2	2	0	0	2	0
3	3	0	0	0	0
4	4	4	4	4	0

，

其中 $4 \overline{\in} X_4$.我们再取X_5的一点有界化，它是一个六阶的非负的具有条件（S）的真BCH-代数，记为X_6，其乘法表为：

$*_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	3	3	0	0
2	2	0	0	2	0	0
3	3	0	0	0	0	0
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	5	5	0

.

一般地，当$n>4$时，X_{n-1}的一点有界化为X_n，是一个n阶的非负的具有条件（S）的真BCH-代数，其乘法表可见$*_n$；关于对任意的大于4的自然数n，X_n的性质（n阶、非负、具有条件（S）、有界）可由数学归纳法立即推知。这样，张仲选对作者所提出的问题3以一个肯定回答，即有下列：

定理17 对于任意的自然数$\gamma\geqslant 4$，存在基数γ的具有条件（S）的真BCH-代数。　　　　Q·E·D·

这个结果推广了作者得到的定理11，而且这个结果和定理9合在一起便完全肯定地回答了具有条件（S）的真BCH-代数类的基数问题（注意必须$\gamma\geqslant 4$）。

$*_n$	0	1	2	3	4	5	…	$n-2$	$n-1$
0	0	0	0	0	0	0	…	0	0
1	1	0	3	3	0	0	…	0	0
2	2	0	0	2	0	0	…	0	0
3	3	0	0	0	0	0	…	0	0
4	4	4	4	4	0	0	…	0	0
5	5	5	5	5	5	0	…	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	…	0	0
$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	…	$n-1$	0。

6．局部完备性和完备性

在本节的最后，我们简单地介绍一下完备性和局部完备性。在第二章36中，我们曾经介绍了BCK-代数理论中的完备性和局部完备性的概念。在BCH-代数理论中也可引入完备性和局部完备性的概念。

定义 3〔注447〕 设⟨X；$*$,0⟩是一个BCH-代数。如果X的每个子集A有最小的上界（∈A），记为

$$\sup A \in A, \tag{11}$$

那么称⟨X；$*$，0⟩是完备的。

例 9 任意的完备的BCK-代数都是完备的BCH-代数。

例10 例3中给出的真BCH-代数⟨X；$*$，0⟩是完备的，因按“≤”，（X，≤）是一个全序集，其元素之间的关系如下图：

$$0 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1,$$

其中箭头所示方向为由小到大的方向。

由此例可知成立下列：

定理18[注448]　1)存在完备的真BCH-代数。2)完备性是BCH-代数理论中的一个固有性质。3)完备BCH-代数一定是有界的。4)存在有界的、但非完备的BCH-代数。5)完备BCH-代数类是有界BCH-代数类的真子类。

证　1)由例10知，存在完备的真BCH-代数。

2)由于定理Ⅱ·3·6，在BCI-代数理论中不必讨论有界性，从而不必讨论完备性。故完备性是BCH-代数理论中的一个固有性质。

3)设⟨X；$*$，0⟩是任一完备的BCH-代数。按定义3，集合$X\sqsubseteq X$有最小的上界，即有

$$x\leqslant \sup X\in X,\qquad \forall x\in X.$$

从而，$\sup X$就是X的单位元，即X是有界的。

4)有界的、但非完备的BCH-代数的一个例子见下列例11。

5)由3)及4)知，完备BCH-代数类是有界BCH-代数类的一个真子类。　　Q·E·D·

例11　设X＝{0，1，2，3}，X中的二元运算$*$由下表给出：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	1	0	2
3	3	3	0	0，

则⟨X；$*$，0⟩是一个真BCH-代数。X是有界的，因2是单位元。按≤，X中的元素可排如图7-4：

易见，(X，≤)是一个半序集，1与3是两个不可比较的元

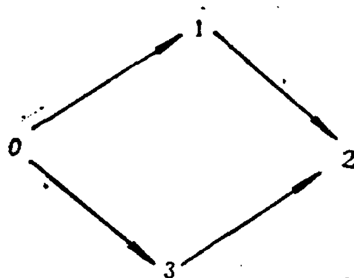


图 7－4

素。这样，集合{1，3}并不包含其元素的最小上界。因此，X不是完备的。

1984年5月，张仲选把BCK-代数理论中的局部完备性推广到BCH-代数理论中，引入下列：

定义4 设〈X；∗，0〉是一个BCH-代数。如果X的每个子代数Y在Y中有最小上界，那么〈X；∗，0〉称之为局部完备的。

例12 每个局部完备的BCK-代数都是局部完备的BCH-代数。

例13 每个完备的BCH-代数都是局部完备的。

例14 例11中给出的真BCH-代数〈X；∗，0〉是有界的，但不是局部完备的。因子代数{0，1，3}中没有最小上界。

显然，有下列结果：

定理19〔注449〕 每个局部完备的BCH-代数都是有界的。局部完备BCH-代数类是有界BCH-代数类的一个真子类。

证 由于X是局部完备BCH-代数〈X；∗，0〉的一个子代数，故X中有最小上界，即为它的单位元。因此，〈X；∗，0〉是有界的。由例14知，第二个结论成立。 Q·E·D·

由例13知，

$$\text{完备BCH-代数类} \sqsubseteq \text{局部完备BCH-代数类}, \quad (12)$$

那么(12)中的包含关系是否真包含呢？也就是有下列：

问题4〔注450〕 是否存在一个局部完备的(真)BCH-代数，而不是完备BCH-代数？

这是迄今尚未解决的一个问题，欢迎有兴趣的读者研究这个问题。

张仲选给出了局部完备性的下列显然的特征：

定理20 设⟨X; ∗, 0⟩是BCH-代数。那么X是局部完备的当且仅当X的每个子代数（作为BCH-代数）是有界的。

Q·E·D·

作为定理Ⅰ·6·13的推广，张仲选得到了下列：

定理21 任何局部完备的BCH-代数是具有条件（S）的。

证 设⟨X; ∗, 0⟩是一个局部完备的BCH-代数。由定理19，X是有界的。设a，b是X的任二元素。由定理Ⅵ.11.16知，$A(a,b)$是X的一个子代数。由局部完备性知，子代数$A(a,b)$中有最小上界，因此，

$$a \circ b = \sup A(a, b) \in A(a, b).$$

所以，⟨X; ∗, 0⟩是具有条件（S）的BCH-代数。Q·E·D·

注3 局部完备性也是一个固有性质。

第八章 对BCK-代数、BCI-代数和BCH-代数理论进一步发展的一些看法

在这本书的最后，我们特别留一章来谈谈对BCK-代数、BCI-代数和BCH-代数理论进一步发展的一些看法。我们分下列几个问题来谈：

1. 已经形成理论

总的来讲，BCK-代数理论、BCI-代数理论和BCH-代数理论都已经形成独立的代数理论。这三个理论出现时间都不长，BCK-代数和BCI-代数都是1966年被引入的，而BCH-代数则是在1981年才开始出现的。但是，经过一批数学工作者的努力，它们都已有较丰富的内容了。这三个理论都研究了代数的性质，构造新代数的方法、理想理论、簇论、某些类型的代数等，分别引入了许多概念，得到了大量的结果，尤其各自的特性已有不少被发现了。

2. 尚待继续发展

然而，BCK-代数理论、BCI-代数理论和BCH-代数理论都尚待继续发展。这个看法的理由是：

第一，这三个理论本身都还不够完整。比较起来，BCK-代数理论内容较多，而BCI-代数理论和BCH-代数理论实际发展时间都不长，距理论的完整应当说还有很大的距离。

第二，还有一批问题没有解决。我们在这本书中提出了一些问题；还有一些问题是明显的，我们并没有列出来。解决这些问题无疑对这三个理论的发展是很重要的。解决这些问题，本身就是使这三个代数理论进一步发展。

第三，将会出现新的研究课题、新的方向和新的问题。进一步的研究，除了解决已有的问题，必然会出现新课题，新方向和新问题。发现和提出问题，然后去研究问题和解决问题，进一步再发现新问题，这正是科学研究的一般规律。这三个代数理论的研究自然也应遵循这个规律。

第四，还有许多薄弱的课题尚待进一步研究，我们只要稍微比较这本书的各章节，就能发现不少薄弱的课题。而这些地方必是理论开展较少的地方或理论研究较为困难的地方。这些地方正是我们应当投入工作之处。

3．发展非常迅速

这三个理论的发展速度非常快，每年出现的论文成倍增长。从国内来看，现在已有几十位数学工作者投入这三个理论的工作，已出现了大量成果，正在不断丰富这三个理论。

4．掌握主攻方向

大批数学工作者投入这三个理论的工作，必然使这三个理论丰富和充实起来，然而，也有另一面的问题，就是这种研究完全带有“自由”的倾向，五花八门，容易忘却和偏离主攻方向。目前这三个理论的主攻方向应当是什么呢？作者认为，内在性质的研究应是主要的，就是说，要抓住这三个理论本身固有的性质，固有的特征，固有的特点。这才是抓住了它们的本质。从这个意义上来讲，这三个理论的研究，尤其是BCI-代数理论和BCH-代数理论的研究是远远不够的。

5．注意联系实际

这三个代数理论已联系到格论、群论、簇论、拓扑代数等。这种联系可继续去研究。应当考虑的一个重要问题是，如何把这三个代数理论与实际问题联系起来。当然，这并不影响理论上进一步的研究。

6．尽力发挥优势

我国数学工作者在这三个代数理论上已形成一定的优势。比较起来，BCH-代数理论是我们提出来的。BCI-代数理论的主要部分基本上是我国数学学者的工作。因此，BCI-代数理论和BCH-代数理论的研究应大力加强，尽力发挥我们的优势，大大地推进这些理论。当然，BCK-代数理论的研究也是需要投入一定的力量的。

7．积极组织队伍

要进一步开展对BCK、BCI和BCH-代数的研究，我们必须把有兴趣的数学工作者都组织起来，牢牢掌握大方向，充分发挥我们的优势，有分工、有合作，全面地铺开这三个理论的研究工作。在开展这三个理论研究的同时，也要提防对我们研究工作的各种破坏活动。我们希望国内外数学界（尤其是代数学和拓扑学的）前辈们和同行们都能支持这三个理论的研究工作。我们也希望有兴趣的青年们能积极投入这三个理论的研究工作，不断地、深入地开展工作，取得更大的成就。

这些意见供有兴趣的读者参考。

注　　记

1. 问题Ⅰ.1.1，这是作者提出的一个问题。在这里，作者实际上说明了什么是真类问题。

2. 问题Ⅰ.1.2，这是作者提出的一个问题。在这里，作者实际上说明了什么是基数问题。

3. 问题Ⅰ.1.3，这是作者提出的一个问题。在这里，作者实际上说明了什么是真子类问题。

4. 引理Ⅰ.1.2，这是作者得到的一个结果。

5. 定理Ⅰ.1.1，这是作者得到的一个结果。

6. 推论Ⅰ.1.2，这是作者得到的一个结果。

7. 定理Ⅰ.1.2，这是作者得到的一个结果。

8. 定理Ⅰ.2.2，这是作者得到的一个结果。请参看〔28〕。

9. 引理Ⅰ.2.2，是作者得到的一个结果。

10. 定理Ⅰ.2.3是作者得到的一个结果。

11. 引理Ⅰ.2.4和引理Ⅰ.2.5，这里作者首次明确地给出(cf〔19〕p.5)，这样做突出了它们本身是BCK-代数和可换BCK-代数的性质。

12. 定理Ⅰ.2.7是作者得到的一个结果。

13. 定理Ⅰ.2.9是作者得到的一个结果。

14. 定理Ⅰ.2.10是作者得到的一个结果。

15. 定理Ⅰ.3.1，这是作者得到的有界BCK-代数的一个特征性质，其必要性已由李丹〔45〕得到。

16. 定理Ⅰ.3.5是作者得到的一个结果。

17. 定理Ⅰ.3.6是作者得到的一个结果。

18. 引理Ⅰ.3.1是作者得到的一个结果。

19. 引理Ⅱ.3.2是作者得到的一个结果。

20. 定理Ⅱ.3.7是作者得到的一个结果。

21. 例Ⅱ.4.2，这是作者给出的一个反例，说明了正定关联BCK-代数类是BCK-代数类的一个真子类。

22. 例Ⅱ.4.6，这是作者给出的。

23. 定理Ⅱ.4.3是作者得到的一个结果。

24. 定理Ⅱ.4.4是作者得到的一个结果。

25. 定理Ⅱ.4.6是作者得到的一个结果。

26. 问题Ⅱ.4.3是作者提出的一个问题。

27. 定理Ⅱ.5.2是作者得到的一个结果。

28. 定理Ⅱ.5.3是作者得到的一个结果。

29. 定理Ⅱ.5.4是作者得到的一个结果。

30. 定理Ⅱ.6.3是作者得到的一个结果。

31. 定理Ⅱ.6.4及例Ⅱ.6.6是作者得到的一个结果

32. 定理Ⅱ.6.5及例Ⅱ.6.8是作者得到的一个结果

33. 定理Ⅱ.6.6是作者得到的一个结果。

34. 定理Ⅱ.6.9的充分性证明是作者给出的。K·Iséki在"On BCK-algebras with condition (S)" (Math.Jap.24, No.6 (1980), 625—626) 中给出的充分性证明有缺陷。

35. 定理Ⅱ.7.3是作者得到的一个结果。

36. 问题Ⅱ.7.1是作者提出的一个问题。

37. 定义Ⅱ.8.1是作者引进的一个概念。

38. 定理Ⅱ.8.1是作者得到的一个结果。

39. 定理Ⅱ.8.2是作者得到的一个结果。

40. 定理Ⅱ.8.5是作者得到的一个结果。

41. 定理Ⅱ.8.8是作者得到的一个结果。

42. 定理Ⅱ.8.9是作者利用定理Ⅱ.8.8得到的一个结果。

43. 定义Ⅱ.8.8是作者对于一切理想皆是关联理想的BCK-代数的一个名称。作者认为，这个名称较为恰当。K·Iséki和S·Tanaka在"Ideal theory of BCK-algebras" (Math.Jap.21 (1976), 351—366) 中称之为关联BCK-代数。这与定义Ⅱ.5.1将会混淆。

42. 定理Ⅱ.8.16，这是J·Ahsan和A·B·Thaheem在"On ideals in BCK-algebras" (Math.Sem.Notes, Vol.5 (1977), 167—172) 一文中的定理1.1。但是原文中该定理缺少"非平凡的"条件。显然，平凡的BCK-代数是有界的，见例Ⅱ.3.1，但是它不能包含一个极大理想。而且这个定理的证明必须要有"非平凡的"条件。

43. 定义Ⅱ.9.4，这是作者引入的一个概念。

44. 定义Ⅱ.9.5，这是作者引入的一个概念。

45. 定理Ⅱ.9.5，这是作者得到的一个结果。

46. 定理Ⅱ.9.6，这是作者得到的一个结果。

47. 定理Ⅱ.9.10，这是作者得到的一个结果。

48. 定义Ⅱ.9.7，这是作者引入的一个记号。

49. 定理Ⅱ.9.12，这是作者得到的一个结果。

50. 定理Ⅱ.9.13，这是作者得到的一个结果。

51. 引理Ⅱ.9.3，这是作者得到的一个结果。

52. 定理Ⅱ.9.14，这是作者得到的一个结果。J·Ahsan和A·B·Thaheen在本注记〔42〕中一文中曾给出定理2.3："设X是一个BCK-代数和A是X的一个理想。那么存在X的理想和X/A的理想之间的一个一一对应，使得J↔J/A"。这个结果是有问题的。作者的这个结果比之更明确，而不致于出现问题。另外，作者还明确地给出了引理2、4和5，尤其是给出了引理4的证明和引理5中"P (J) = T"这一结果。因此，不能认为作者这一结果（Ⅱ.9.14）只是一个改进，而事实上是新结果。

53. 定义Ⅱ.10.1，是作者引入的一个概念。

54. 定义Ⅱ.10.2，是作者引入的一个概念。

55. 定理Ⅱ.10.5，是作者得到的一个结果。

56．定理Ⅰ.10.6是作者得到的一个结果。

57．定理Ⅰ.10.7是作者得到的一个结果。当|I|= 2 时有界性是可积性的证明，李丹〔45〕已给出。

58．定理Ⅰ.10. 9 是作者得到的一个结果。

59．定理Ⅰ.10.10是作者得到的一个结果。

60．引理Ⅰ.10. 3 是作者得到的一个结果。

61．引理Ⅰ.10. 4 是作者得到的一个结果。它推广了作者的结果——引理Ⅰ.10.3。

62．定理Ⅰ.10.12 是作者得到的一个结果，它推广了 K·Iséki 的定理Ⅰ10、11.后者见K·Iséki, BCK-algebras with condition (S)，Math. Japonica 24, No, 1 (1979)，107—119，中的定理 5 。

63．定理Ⅰ.10.13，这是作者得到的一个结果。

64．定义Ⅰ.11. 1，这是作者引入的一个概念。

65．定理Ⅰ.11. 8，这是作者得到的一个结果。

66．定理Ⅰ.11. 9，这是作者得到的一个结果。

67．定理Ⅰ.11.10，这是作者得到的一个结果。

68．定义Ⅰ.12. 3，这是作者引入的一个概念。

69．定理Ⅰ.12. 3，这是作者得到的一个结果。

70．定理Ⅰ.12. 4，这是作者得到的一个结果。

71．定理Ⅰ.12.6，这是作者得到的一个结果。

72．定理Ⅰ.12.9，这是作者得到的一个结果。

73．例Ⅱ.1.4，这是作者给出的一个实际例子（真BCI-代数）。

74．定理Ⅱ.1.3，这是作者得到的一个结果。

75．定义Ⅱ.1.3后的注，这是作者得到的一些结果和引入的一些概念、记号。

76．引理Ⅱ.1.1是作者得到的一个结果。

77．定理Ⅱ.1.4是作者得到的一个结果。

78．定理Ⅱ.1.5是作者得到的一个结果，雷天德〔15〕中也得到了这一结

果。

79. 定理Ⅱ.1.6是作者得到的一个结果。

80. 定理Ⅱ.2.8，这是作者得到的一个结果，见〔31—32〕。

81. 定义Ⅱ.3.1是作者引入的一个概念。

82. 定理Ⅱ.3.2及其证明，这是作者给出的。

83. 定理Ⅱ.3.3的第二个结论，这是作者给出的真BCI-代数的一个特征。

84. 定理Ⅱ.4.2及其推论，这是作者得到的结果。

85. 定义Ⅱ.4.2，这里作者引入了两个算子H(x, y)及H_0(x)。

86. 定理Ⅱ.4.3是作者得到的一个结果。

87. 定理Ⅱ.4.5，这是K·Iséki及A·B·Thaheem在〔51〕中提出来的。但是，在〔51〕中对该结果的证明作者认为是错误的（见〔51〕命题2），这里的证明是作者给出的。

88. 定义Ⅱ.4.3是作者引入的一个概念。

89. 定理Ⅱ.4.6是作者给出的一个结果。

90. 定理Ⅱ.5.2，这是作者得到的一个结果。由此，作者引入了任意一族BCI-代数的积代数。

91. 定义Ⅱ.5.1，这是作者引入的一个概念。

92. 定义Ⅱ.5.2，这是作者引入的一个概念。

93. 定理Ⅱ.5.3，这是作者得到的一个结果。

94. 定理Ⅱ.5.4，这是作者得到的一个结果。

95. 定理Ⅱ.5.5，这是作者得到的一个结果。

96. 定理Ⅱ.6.2，这是作者得到的一个结果。

97. 定义Ⅱ.6.2，这是作者引入的五个概念。

98. 定理Ⅱ.6.5是作者和西北大学数学系八〇级学生李欣一起得到的。

99. 定义Ⅱ.6.3，这是作者和李欣一起引入的一个记号L(X)。

100. 定理Ⅱ.6.9是作者得到的一个结果。

101. 定理Ⅱ.6.10是作者得到的一个结果。

102. 定理Ⅲ.6.11是作者得到的一个结果。

103. 引理Ⅲ.6.1是作者得到的一个结果。

104. 定理Ⅲ.6.12是作者得到的一个结果。

105. 定义Ⅲ.6.4是作者引入的一个概念。

106. 问题Ⅲ.7.2是作者提出的一个问题。尚未解决。

107. 定义Ⅲ.8.2是作者引入的一个概念，参看〔35〕。

108. 定义Ⅲ.8.3是作者引入的一个概念，参看〔35〕。

109. 定义Ⅲ.8.4是作者引入的一个记号。

110. 定理Ⅲ.8.2是作者得到的一个结果。

111. 定理Ⅲ.8.3是作者得到的一个结果。

112. 定理Ⅲ.8.4是作者得到的一个结果。

113. 定理Ⅲ.8.5是作者得到的一个结果，见〔35〕。

114. 定理Ⅲ.8.5的推论，这是作者得到的一个结果，见〔35〕。

115. 定理Ⅲ.8.6是作者得到的一个结果，见〔35〕。

116. 定理Ⅲ.8.7是作者得到的一个结果，见〔35〕。

117. 定理Ⅲ.8.9是作者得到的一个结果。

118. 定理Ⅲ.8.10是作者得到的一个结果。

119. 定义Ⅲ.8.5，这是作者引入的一个概念。见〔35〕。

120. 定理Ⅲ.8.11是作者得到的一个结果，见〔35〕。

121. 定理Ⅲ.8.12是作者得到的一个结果，见〔35〕。

122. 定义Ⅲ.8.6是作者引入的一个概念。

123. 定理Ⅲ.8.13是作者得到的一个结果。

124. 定义Ⅲ.8.7是作者引入的一个概念。

125. 定义Ⅲ.9.3，这是作者引入的一个概念。

126. 定理Ⅲ.9.5，这是作者得到的一个结果。

127. 定义Ⅲ.9.4，这是作者引入的一个概念。

128. 定理Ⅲ.9.6，这是作者得到的一个结果。

129. 定理Ⅲ.9.9，这是作者得到的一个结果。

130. 定理Ⅲ.9.11，这是作者得到的一个结果。

131. 定理Ⅲ.9.12，这是作者得到的一个结果。

132. 定理Ⅲ.9.13，这是作者得到的一个结果。

133. 定理Ⅲ.9.14，这是作者得到的一个结果。

134. 定理Ⅲ.9.15，这是作者得到的一个结果。

135. 定理Ⅲ.9.16，这是作者得到的一个结果。

136. 定理Ⅲ.9.17，这是作者得到的一个结果。

137. 定义Ⅳ.1.1. 前作者引入了推广性质和固有性质这两个概念。

138. 定义Ⅳ.1.3，这是作者引入的一个概念。

139. 定理Ⅳ.1.5，这是作者得到的一个结果。见〔34〕。

140. 定理Ⅳ.1.6，这是作者得到的一个结果。见〔34〕。

141. 定义Ⅳ.1.4，这是作者引入的一个概念。

142. 定理Ⅳ.1.7，这是作者得到的一个结果。

143. 定理Ⅳ.1.7的推论，这是作者得到的一个结果。

144. 定理Ⅳ.1.8，这是作者得到的一个结果。

145. 定义Ⅳ.1.9，这是作者得到的一个结果。

146. 定理Ⅳ.1.10，这是作者得到的一个结果。

147. 定理Ⅳ.1.11，这是作者得到的一个结果。

148. 定义Ⅳ.1.12，这是作者得到的一个结果。

149. 定理Ⅳ.1.13，这是作者得到的一个结果。

150. 定理Ⅳ.1.14，这是作者得到的一个结果。

151. 定义Ⅳ.1.5，这是作者引入的一个概念。

152. 问题Ⅳ.1，这是作者提出的一个问题。

153. 定理Ⅳ.1.15，这是作者得到的一个结果。

154. 定理Ⅳ.1.16，这是作者得到的一个结果。

155. 定理Ⅳ.1.17，这是作者得到的一个结果。

156. 定理Ⅳ.1.17的推论，这是作者得到的一个结果。

157. 定理Ⅳ.1.18，这是作者得到的一个结果。

158. 定理Ⅳ.2.2，作者在1982年11月得到了这个结果，见〔33〕；雷天德也独立地得到了这个结果，见〔40〕；关于这个情况可参看〔15〕。

159. 定理Ⅳ.2.3，这是作者得到的一个结果，见〔33〕。在〔51〕中作者和K·Iséki还联名发表了这个结果。

160. 定理Ⅳ.3.2是作者得到的一个结果。

161. 定理Ⅳ.3.4是作者得到的一个结果。

162. 定理Ⅳ.3.5是作者得到的一个结果。

163. 定理Ⅳ.3.6是作者得到的一个结果。

164. 定理Ⅳ.3.7是作者得到的一个结果。

165. 引理Ⅳ.3.1和引理Ⅳ.3.2是作者得到的两个结果。

166. 定理Ⅳ.3.9是作者得到的一个结果。

167. 定理Ⅳ.3.10是作者得到的一个结果。

168. 定理Ⅳ.3.11是作者得到的一个结果。

169. 定理Ⅳ.3.13是作者得到的一个结果。

170. 引理Ⅳ.3.3是作者得到的一个结果。

171. 定理Ⅳ.3.14是作者得到的一个结果。

172. 定义Ⅳ.4.1是作者引入的一者概念。

173. 定义Ⅳ.4.2是作者引入的一个概念。

174. 定义Ⅳ.4.3是作者引入的一个概念。

175. 定理Ⅳ.4.1是作者得到的一个结果。

176. 定理Ⅳ.4.2是作者得到的一个结果。

177. 定理Ⅳ.4.3是作者得到的一个结果。

178. 定义Ⅳ.4.4是作者引入的一个概念。

179. 定义Ⅳ.4.5是作者引入的一个概念。

180. 例Ⅳ.4.1，这是作者给出的。作者在这里称之为BCK-性或非负性。

181. 定义Ⅳ.4.6是作者作引入的一个概念。

182. 定理Ⅳ.4.4是作者作引入的一个结果。

183. 定义Ⅳ.4.7是作者引入的一个概念。

184. 定义Ⅳ.4.8是作者引入的一个概念。

185. 定理Ⅳ.4.5是作者得到的一个结果。

186. 定理Ⅳ.4.6是作者得到的一个结果。

187. 定理Ⅳ.4.8是作者得到的一个结果。

188. 定义Ⅴ.1.1是作者和K·Iséki引入的，见〔27—28，50〕。

189. 定理Ⅴ.1.1，这是作者得到的一个结果。实际上〔27〕中已指出了。

190. 定理Ⅴ.1.2是作者得到的一个结果。

191. 定理Ⅴ.1.3是作者得到的一个结果，见〔33,50〕。

192. 定理Ⅴ.1.4是作者得到的一个结果。

193. 问题Ⅴ.1是作者提出的一个问题。

194. 定理Ⅴ.1.5是作者得到的一个结果，见〔31，32〕。

195. 定理Ⅴ.1.5的推论，这是作者得到的一个结果。

196. 定理Ⅴ.1.6是作者得到的一个结果。

197. 定理Ⅴ.2.1，这是作者和K.Iséki共同得到的结果，见〔26〕。

198. 定理Ⅴ.2.1，的推论1，这是作者和K·Iséki共同得到的结果，见〔28〕。

199. 定理Ⅴ.2.2，这是作者和K·Iséki共同得到的结果，见〔28〕。

200. 定理Ⅴ.2.3，这是作者和K·Iséki共同得到的结果，见〔28〕。

201. 定理Ⅴ.2.4，这是作者和K·Iséki共同得到的结果，见〔28〕。

202. 定理Ⅴ.2.5，这是作者和K·Iséki共同得到的结果，见〔28〕。

203. 定理Ⅴ.2.6，这是作者和K·Iséki共同得到的结果，此即定理Ⅴ.2.5。

204. 定理Ⅴ.2.7，这是作者得到的结果。

205. 定理Ⅴ.2.8，这是作者和K·Iséki共同得到的结果，见〔28〕。

206. 定理Ⅴ.2.9，这是作者得到的一个结果。

207. 定理Ⅴ.2.9后的注，作者在这里提出运算交换性的名称，参看

〔28〕。

208. 定理V.3.1，这是作者得到的一个结果，见〔31〕。

209. 定理V.3.2，这是作者得到的一个结果。

210. 定理V.3.3，这是作者得到的一个结果，见〔31〕。

211. 定理V.3.4，这是作者得到的一个结果，见〔31〕。

212. 定理V.3.5，这是作者得到的一个结果，见〔31〕。

213. 定理V.3.7，这是作者得到的一个结果，见〔31〕。

214. 定理V.3.8，这是作者得到的一个结果。

215. 定理V.3.9，这是作者得到的一个结果。

216. 定理V3.10，这是作者得到的一个结果。

217. 定理V.3.11，这是作者得到的一个结果。

218. 定理V.3.12，这是作者得到的一个结果。

219. 定理V.3.13，这是作者得到的一个结果，见〔31〕。

220. 定理V.3.14，这是作者得到的一个结果。

221. 定理V.3.15，这是作者得到的一个结果。

222. 定理V.3.16，这是作者得到的一个结果。

223. 引理V.3.1，这是作者得到的一个结果。

224. 引理V.3.2，这是作者得到的一个结果。

225. 引理V.3.3，这是作者得到的一个结果。

226. 引理V.4.2，这是作者得到的一个结果，见〔34〕。

227. 定理V.4.1，这是作者得到的一个结果，见〔34〕。

228. 引理V.4.3，这是作者得到的一个结果，见〔34〕。

229. 定理V.4.2，这是作者得到的一个结果，见〔34〕。

230. 定理V.7.11是作者得到的一个结果。

231. 定理V.7.11的推论，这是作者得到的一个结果。

232. 定理V.7.12是作者得到的一个结果。

233. 引理V.7.1是作者得到的一个结果。

234. 引理V.7.2是作者得到的一个结果。

235。定理Ⅴ.7.13是作者得到的一个结果。

236。定理Ⅴ.7.15是作者得到的一个结果。

237。定理Ⅴ.7.17是作者得到的一个结果。

238。定理Ⅴ.7.19是作者得到的一个结果。

239。定义Ⅴ.8.1是作者和李欣一起引入的一个概念。

240。定理Ⅴ.8.1是作者和李欣一起得到的一个结果。

241。定理Ⅴ.8.2是作者和李欣一起得到的一个结果。

242。定理Ⅴ.8.3是作者得到的一个结果。

243。定理Ⅴ.8.4是作者和李欣一起得到的一个结果。

244。定理Ⅴ.8.5是作者得到的一个结果。

245。定义Ⅴ.8.2是作者引入的一个概念。

246。定理Ⅴ.8.6是作者得到的一个结果。

247。定理Ⅴ.8.7是作者和李欣一起得到的一个结果。

248。引理Ⅴ.8.1是作者和李欣一起得到的一个结果。

249。引理Ⅴ.8.2是作者和李欣一起得到的一个结果。

250。引理Ⅴ.8.3是作者和李欣一起得到的一个结果。

251。定理Ⅴ.8.13是作者得到的一个结果。

252。定理Ⅴ.8.14是作者和李欣一起得到的一个结果。

253。定义Ⅵ.1.4是作者引入的一个概念，见〔36〕。

254。定义Ⅵ.1.5是作者引入的一个概念，见〔36〕。

255。定义Ⅵ.1.6是作者引入的一个概念。

256。定理Ⅵ.1.1是作者得到的一个结果，见〔36〕。

257。定理Ⅵ.1.2是作者得到的一个结果。见〔36〕。

258。定理Ⅵ.1.3是作者得到的一个结果。

259。引理Ⅵ.1.3是作者得到的一个结果，见〔36〕。

260。定理Ⅵ.1.4是作者得到的一个结果，见〔36〕。

261。定理Ⅵ.1.5是作者得到的一个结果。

262。引理Ⅵ.1.4是作者得到的一个结果。

263. 定理Ⅵ.1.6是作者得到的一个结果。

264. 定理Ⅵ.1.7是作者得到的一个结果。

265. 定理Ⅵ.1.8是作者得到的一个结果。

266. 定义Ⅵ.2.4是作者引入的一个概念。〔53〕。

267. 定义Ⅵ.2.5是作者引入的一个概念。〔53〕对于BCK-代数，见〔52〕。

268. 定理Ⅵ.2.2是作者得到的一个结果。

269. 引理Ⅵ.2.1是作者得到的一个结果。对于BCK-代数，见〔52〕。

270. 引理Ⅵ.2.2是作者得到的一个结果。对于BCK-代数，见〔52〕。

271. 引理Ⅵ.2.3是作者得到的一个结果。对于BCK-代数，见〔52〕。

272. 定理Ⅵ.2.3是作者得到的一个结果。

273. 定义Ⅵ.2.6是作者引入的一个概念。

274. 定理Ⅵ.2.4是作者得到的一个结果。〔53〕

275. 注Ⅵ.2.1实际上是作者得到的一个结果，比〔52〕中所得结果要规范一些。

276. 定理Ⅵ.2.5是作者得到的一个结果。〔53〕

277. 定理Ⅵ.2.5的推论1是作者得到的一个结果。

278. 定理Ⅵ.2.5的推论2是作者得到的一个结果。见〔53〕

279. 定理Ⅵ.2.5的推论3是作者得到的一个结果。

280. 定义Ⅵ.2.7是作者引入的一个概念，见〔53〕。

281. 定理Ⅵ.2.6是作者得到的一个结果，见〔53〕。

282. 定理Ⅵ.2.7是作者得到的一个结果，见〔53〕。

283. 定理Ⅵ.2.7的推论是作者得到的一个结果，见〔53〕。

284. 定义Ⅵ.2.9是作者引入的一个概念，见〔53〕。

285. 定义Ⅵ.2.10是作者引入的一个概念，见〔53〕。

286. 定义Ⅵ.2.11是作者引入的一个概念，见〔53〕。

287. 定理Ⅵ.2.8是作者得到的一个结果，见〔53〕。

288. 定理Ⅵ.2.8的推论是作者得到的一个结果，见〔53〕。

289. 定理Ⅵ.2.9是作者得到的一个结果，见〔53〕。

290. 定理Ⅵ.2.10是作者得到的一个结果。

291. 定义Ⅶ.1.1，这是作者引入的一个概念。见〔37〕。

292. 定理Ⅶ.1.1，这是作者得到的一个结果，见〔37〕。

293. 问题Ⅶ.1.1，这是作者提出的一个问题，见〔37〕。

294. 定义Ⅶ.1.2，这是作者和李新引入的一个概念，见〔38〕。

295. 问题Ⅶ.1.2，这是作者和李新提出的一个问题，见〔38〕。

296. 定理Ⅶ.1.2，这是作者和李新得到的一个结果，见〔38〕.

297. 定理Ⅶ.1.3，这是作者得到的一个结果。

298. 问题Ⅶ.1.4，这是作者提出的一个问题。

299. 定理Ⅶ.2.1，这是作者得到的一个结果，见〔37〕。

300. 定理Ⅶ.2.2，这是作者和李新得到的一个结果，见〔38〕。

301. 定理Ⅶ.2.3，这是作者得到的一个结果。

302. 问题Ⅶ.2.4，这是作者提出的一个问题。

303. 定理Ⅶ.2.5，这是作者和李新得到的一个结果。见〔38〕。

304. 定义Ⅶ.2.1，这是作者引入的一个概念。

305. 定理Ⅶ.2.6，这是作者得到的一个结果。

306. 定理Ⅶ.2.7，这是作者得到的一个结果，见〔37〕。

307. 定理Ⅶ.2.8，这是作者得到的一个结果，见〔37〕，

308. 定义Ⅶ.3.1，这是作者引入的一个概念。

309. 定理Ⅶ.3.1，这是作者得到的一个结果。

310. 定理Ⅶ.3.2，这是作者得到的一个结果。见〔37〕。

311. 定理Ⅶ.3.3，这是作者得到的一个结果。

312. 定理Ⅶ.3.4，这是作者得到的一个结果。

313. 定理Ⅶ.3.5，这是作者得到的一个结果。

314. 定理Ⅶ.3.6，这是作者得到的一个结果。

315. 定理Ⅶ.3.7，这是作者得到的一个结果。

316. 定理Ⅶ.3.8，这是作者得到的一个结果。

317. 定义Ⅶ.3.2，这是作者引入的一个概念。

318. 定义Ⅶ.4.1，这是作者引入的一个概念。

319. 定理Ⅶ.4.1，这是作者得到的一个结果。

320. 定理Ⅶ.4.2，这是作者得到的一个结果。

321. 定义Ⅶ.4.2，这是作者引入的一个概念。

322. 问题Ⅶ.4.1，这是作者提出的一个问题。

323. 定理Ⅶ.4.3，这是作者得到的一个结果。

324. 定义Ⅶ.4.3，这是作者引入的一个概念。

325. 定义Ⅶ.5.1，这是作者引入的一个概念。

326. 定理Ⅶ.5.1，这是作者得到的一个结果。

327. 定理Ⅶ.5.2，这是作者得到的一个结果。

328. 定理Ⅶ.5.3，这是作者得到的一个结果。见〔37〕。

329. 定理Ⅶ.5.4，这是作者得到的一个结果。

330. 定义Ⅶ.5.2，这是作者引入的一个概念。

331. 定理Ⅶ.5.5，这是作者得到的一个结果。

332. 定理Ⅶ.5.6，这是作者得到的一个结果。

333. 定理Ⅶ.5.7，这是作者和李新得到的一个结果，见〔38〕。

334. 定义Ⅶ.5.3，这是作者引入的一个概念。

335. 定理Ⅶ.5.8，这是作者得到的一个结果。

336. 定理Ⅶ.5.9，这是作者得到的一个结果。

337. 定理Ⅶ.5.10，这是作者得到的一个结果。

338. 定义Ⅶ.6.1，这是作者引入的一个概念。

339. 定理Ⅶ.6.1，这是作者得到的一个结果。

340. 定理Ⅶ.6.2，这是作者得到的一个结果。

341. 定理Ⅶ.6.3，这是作者得到的一个结果。

342. 定理Ⅶ.6.4，这是作者得到的一个结果。

343. 定理Ⅶ.6.5，这是作者得到的一个结果。

344. 定理Ⅶ.6.6，这是作者得到的一个结果。

345. 定理Ⅶ.6.7，这是作者得到的一个结果。

346. 定理Ⅶ.6.8，这是作者得到的一个结果。

347. 定义Ⅶ.6.2，这是作者引入的一个概念。

348. 定理Ⅶ.6.9，这是作者得到的一个结果。

349. 定理Ⅶ.6.10，这是作者得到的一个结果。

350. 定理Ⅶ.6.11，这是作者得到的一个结果。

351. 定理Ⅶ.7.1是作者得到的一个结果，其中还引入了一族非负的BCH-代数的并代数的概念。

352. 定理Ⅶ.7.2是作者得到的一个结果。

353. 定理Ⅶ.7.3是作者得到的一个结果。

354. 定理Ⅶ.7.4是作者得到的一个结果。

355. 定理Ⅶ.7.5是作者得到的一个结果。

356. 定理Ⅶ.8.1，这是作者得到的一个结果。见〔37〕。

357. 定理Ⅶ.8.2，这是作者得到的一个结果。

358. 定理Ⅶ.8.1，这是作者引入的一个概念。

359. 定理Ⅶ.8.3，这是作者得到的一个结果。

360. 定理Ⅶ.8.4，这是作者得到的一个结果。

361. 定理Ⅶ.8.5，这是作者得到的一个结果。

362. 定理Ⅶ.8.6，这是作者得到的一个结果。

363. 定理Ⅶ.8.7，这是作者得到的一个结果。

364. 定理Ⅶ.8.8，这是作者得到的一个结果。

365. 定理Ⅶ.8.9，这是作者得到的一个结果。

366. 定义Ⅶ.9.1，这是作者引入的一个概念。

367. 定义Ⅶ.9.2，这是作者引入的一个概念。

368. 定义Ⅶ.9.3，这是作者引入的一个概念。

369. 定义Ⅶ.9.4，这是作者引入的一个概念。

370. 定理Ⅶ.9.1，这是作者得到的一个结果。

371. 定理Ⅶ.9.2，这是作者得到的一个结果。

372. 定理Ⅶ.9.3，这是作者得到的一个结果。
373. 定理Ⅶ.9.4，这是作者得到的一个结果。
374. 定理Ⅶ.9.4的推论，这是作者得到的一个结果。
375. 定义Ⅶ.9.5，这是作者引入的一个概念。
376. 定理Ⅶ.9.5，这是作者得到的一个结果。
377. 定理Ⅶ.9.6，这是作者得到的一个结果。
378. 定理Ⅶ.9.7，这是作者得到的一个结果。
379. 定理Ⅶ.9.7，的推论，这是作者得到的一个结果。
380. 定理Ⅶ.9.8，这是作者得到的一个结果。
381. 定理Ⅶ.9.9，这是作者得到的一个结果。
382. 定理Ⅶ.9.10，这是作者得到的一个结果。
383. 定理Ⅶ.9.10，的推论，这是作者得到的一个结果。
384. 注Ⅶ.9.3，这里实际上作者给出了一个结果。
385. 定理Ⅶ.9.11，这是作者得到的一个结果。
386. 定义Ⅶ.9.6，这是作者引入的一个概念。
387. 定理Ⅶ.9.12，这是作者得到的一个结果。
388. 定理Ⅶ.9.13，这是作者得到的一个结果。
389. 定义Ⅶ.9.7，这是作者引入的一个概念。
390. 定理Ⅶ.9.14，这是作者得到的一个结果。
391. 定义Ⅶ.9.8，这是作者引入的一个概念。
392. 定理Ⅶ.10.3是作者得到的一个结果。
393. 定理Ⅶ.10.4是作者得到的一个结果。
394. 定理Ⅶ.10.5是作者得到的一个结果。
395. 定理Ⅶ.10.6是作者和黄秦安一起得到的结果。
396. 定义Ⅶ.10.1是作者给出的两个概念。
397. 定理Ⅶ.10.7是作者得到的一个结果。
398. 定义Ⅶ.11.1是作者引入的一个概念。
399. 定理Ⅶ.11.1是作者得到的一个结果。

400. 定理Ⅶ.11.2是作者得到的一个结果。
401. 定理Ⅶ.11.3是作者得到的一个结果。
402. 定理Ⅶ.11.4是作者得到的一个结果。
403. 定义Ⅶ.11.2是作者引入的一个概念。
404. 定理Ⅶ.11.5是作者得到的一个结果。
405. 定义Ⅶ.11.3是作者引入的一个概念。
406. 定义Ⅶ.11.4是作者引入的一个概念。
407. 定理Ⅶ.11.6是作者得到的一个结果。
408. 定理Ⅶ.11.7是作者得到的一个结果。
409. 定理Ⅶ.11.8是作者得到的一个结果。
410. 定理Ⅶ.11.9是作者得到的一个结果。
411. 定理Ⅶ.11.10是作者得到的一个结果。
412. 引理Ⅶ.11.2是作者得到的一个结果。
413. 引理Ⅶ.11.3是作者得到的一个结果。
414. 引理Ⅶ.11.4是作者得到的一个结果。
415. 定理Ⅶ.11.11是作者得到的一个结果。
416. 定理Ⅶ.11.12是作者得到的一个结果。
417. 定理Ⅶ.11.14是作者得到的一个结果。
418. 定义Ⅶ.12.1是作者和蒋彦一起引入的一个概念。
419. 定义Ⅶ.12.2是作者和蒋彦一起引入的一个概念。
420. 定理Ⅶ.12.2是作者得到的一个结果。
421. 定理Ⅶ.12.2的推论是作者得到的一个结果。
422. 定理Ⅶ.12.3是作者得到的一个结果。
423. 定理Ⅶ.12.4是作者得到的一个结果。
424. 定理Ⅶ.12.5是作者得到的一个结果。
425. 定理Ⅶ.12.6是作者得到的一个结果。
426. 定理Ⅶ.12.7是作者得到的一个结果。
427. 定义Ⅶ.12.3是作者引入的一个概念。

428. 定义Ⅶ.12.4是作者引入的一个概念。

429. 问题Ⅶ.12.2是作者提出的一个问题。

430. 定义Ⅶ.13.1是作者引入的一个概念。

431. 定理Ⅶ.13.1是作者得到的一个结果。

432. 定理Ⅶ.13.2是作者得到的一个结果。

433. 定理Ⅶ.13.3是作者得到的一个结果。

434. 定义Ⅶ.13.2是作者引入的一个概念。

435. 定理Ⅶ.13.4是作者得到的一个结果。

436. 定理Ⅶ.13.5是作者得到的一个结果。

437. 定理Ⅶ.13.6是作者得到的一个结果。

438. 定理Ⅶ.13.7是作者得到的一个结果。

439. 引理Ⅶ.13.1是作者得到的一个结果。

440. 定理Ⅶ.13.8是作者得到的一个结果。

441. 定理Ⅶ.13.9是作者得到的一个结果。

442. 定理Ⅶ.13.10是作者得到的一个结果。

443. 定理Ⅶ.13.11是作者得到的一个结果。

444. 问题Ⅶ.13.3是作者在1983年11月提出的一个问题。1984年5月张仲选已对这个问题予以肯定回答，见定理Ⅶ.13.17。

445. 定理Ⅶ.13.12是作者得到的一个结果。

446. 定理Ⅶ.13.16是作者得到的一个结果。

447. 定义Ⅶ.13.3是作者引入的一个概念。

448. 定理Ⅶ.13.18是作者得到的一个结果。

449. 定理Ⅶ.13.19是作者得到的一个结果。

450. 问题Ⅶ.13.4是作者提出的一个问题。（这个问题是在1984年5月提出的，迄今尚未解决。）

统　计　表

编号	项　目	其　中		小　计
		作者自己	作者与他人合作	
1	结　果	330	21	351
2	定　义	80	6	86
3	问　题	12	1	13
合　计		422	28	450

参 考 文 献

1. F·Hausdorff, Mengenlehre, Berlin, 1935。

2. K·Kuratowski and A·Mostowski,Set Theory,Warszawa, 1926.

3. 方嘉琳，集合论，吉林人民出版社，1982，长春。

4. G·Gratzer, Universal Algebra, Second Edition,New York, 1979。

5. N·Jacobson, Lectures in Abstract Algebra (I),New York, 1951。

6. N·Jacobson, Basic Algebra (I, I), san Francisco, 1974.

7. G·Birkhoff, Lattice。Theory, Znd edition, New York, 1948。

8. 刘绍学，环与代数，科学出版社，1983。

9. F·A·Szász, Radicals of Rings, New York,1981.

10. J·L·Kelley, General Topology, New York, 1955

11. R·Engelking, General Topology, warszawa, 1977.

12. 方嘉琳，点集拓扑学，辽宁人民出版社，沈阳，1983.

13. 胡庆平，BCK-代数和BCI-代数理论产生的背景、发展和方向，一九八三年四月BCK和KCI-代数会议上的报告（西安）。

14. 雷天德、胡庆平，关于BCI-代数理论的简介，一九八二年陕西省数学会年会上的报告。

15. 雷天德，BCI-代数初步，一九八三年四月BCK-和BCI-代数会议上的报告（西安）。

16. 雷天德、蒲义书，BCK-代数和BCI-代数，一九八三年四月BCK-

和BCI-代数会议上的报告（西安）．

17. Y·Imai and K·Iséki, on axiom system of propositional calculi, proc.Japan Acad., 42(1966), 19-22.

18. K·Iséki, An algebra related with a propositional Calculus, Proc. Japan Acad., 42(1966), 26-29.

19. K·Iséki。and S.Tanaka, An introduction to the theory of BCK-algebras, Math。Japonica 23, No. 1(1978), 1-26。

20. K·Iséki, On BCI-algebras, Math.Sem.Notes, Vol.8(1980) 125-130.

21. K·Iséki, On BCI-algebras with condition(s), ibid, Vol. 8 (1980), 171-172.

22. K·Iséki, On the existence of quasicommutative BCI-algebras, ibid., Vol. 8 (1980), 181-186.

23. K·Iséki, A variety of BCI-algebras, ibid., Vol.8(1980), 225-226.

24. K·Iséki, A Problem on BCI-algebras, ibid. Vol.8(1980), 235-236.

25. K·Iséki, Some examples of BCI-algebras, ibid., Vol. 8 (1980), 237-240.

26. K·Iséki, A note on the variety of BCI-algebras of type (1, 0, 0, 0), ibid., Vol. 8 (1980), 509-511.

27. 胡庆平 and K·Iséki, On BCI-algebras(x✱y)✱z=x✱(y✱z), ibid., Vol.8(1980), 553-555.

28. 胡庆平和井关清志，可结合的BCI-代数，科学通报，12(1982), 714-716.

29. 胡庆平 and K·Iséki, The associative BCI—algebra, Kexue Tongbao, Vol.27, No.11(1982), 1143-1146.（英文版）

30. 胡庆平 and K·Isékl, On BCI-algebras satisfying (x✱y)

$*z = x*(y*z)$, Zent.Für Math., Vol.473.03059(Autorre ferat).

31. 胡庆平，BCI-代数及其推广，一九八三年四月BCK-和BCI-代数会议上的报告（西安）.

32. 胡庆平，结合BCI-代数的一些结果，陕西省数学会一九八二年会上的报告.

33. 胡庆平，关于BCI—代数簇的一个问题的解答。(1982.11.30).

34. 胡庆平，高型拟可换BCI-代数的存在性——Iséki的一个问题的解答。(1982.11.1).

35. 胡庆平，BCI-代数的理想(I).(1982.9.6).

36. 胡庆平，可结合的BCI-拓扑代数(I).(1982.5.7)

37. 胡庆平，BCH-代数，一九八三年四月BCK和BCI-代数会议上的报告（西安）.

38. 胡庆平，李新，真BCH-代数。(1983.5.3)

39. 雷天德，有限结合的BCI-代数的结构，陕西师大学报，1982年，17-20.

40. 雷天德，所有BCI-代数作成的类不是一个BCI-代数簇，陕西师大学报，1(1983)，18-19.

41. 雷天德，广义结合的BCI-代数.

42. 雷天德，BCI-代数的P-根性及其重要性质，陕西师大学报，2(1983)，30-36.

43. 蒲义书，BCI-代数的一种算子及其应用.

44. 郭秀云，广义结合BCI-代数和BCI代数的BCK-部分.

45. 李丹，关于有界BCK-代数的几点注记，一九八三年四月BCK和BCI-代数会议上的报告（西安）.

46. 黄涵，关于BCK-代数的同态同构的基本定理，宁夏大学学报，1(1981)，63-66.

47. 黄涵，具有(s)条件的正关联BCK-代数的同构定理，宁夏大学学报，2(1981)，1—3.

48. T·Jech, Set.Theory,New York 1978.

49. 孟杰，BCK-代数的一个注记(1984.5,待发表)。

50. Hu Qingping and K·Iséki,On some classes of BCI-algebras, Math.Japonica 29, No. 2 (1984), 251-253.

51. K·Iséki and A·B·Thaheem, Note on BCI-algebras, Math. Japonica 29, No. 2 (1984), 255-258.

52. K·Iséki,Introduction of a quasi-uniformity on BCK-algebras, Math.Sem.Notes, 4 (1976), 229-230.

53. 胡庆平，BCI-代数的拟一致结构(待发表,1984.3)。

名 词 索 引

（汉英对照，按汉语拼音编序）

C

D

F

G

The BCI-ALGEBRA

By Hu Qingping

ABSTRACT

In 1966, Y.Imai and K·Iséki introduced the BCK-algebras and BCI-algebras. Now, in Japan, Poland, U.S.A, Czechoslovakia, Australia, Libia, Sudan, Sri Lanka, India, Pakistan and China many mathematicians study these kinds of algebras and have obtained results.

My this book is first book on BCI-algebra. There are 8 chapters in the book.

In the first chapter we introduced some preparatory knowledges.

In the second chapter we introduced BCK-algebras simply.

In the third chapter we introduced the concepts and propertiesof BCI-algebras.

In the fourth chapter we introduced some topics; the quasi-commutative BCI-algebras, the question on the veriety of BCI-algebras, the BCI-algebras with the condition(S)and the radical properties of BCI-algebras.

In the fifth chapter we introduced an important topic on BCI-algebras; the associative BCI-algebras. In this cha-

pter we introduced the concepts and properties on the associative BCI-algebras, and some generalized algebras of associative BCI-algebras—the generalized associative BCI-algebras and the BCI-algebras with the property of discrete sub-algebra.

In the sixth chapter we introduced BCK and BCI-topological algebras.

In the seventh chapter we introduced BCH-algebras which introduced by the a author in 1981.

In the eighth chapter the author introduced his some views on further development of BCK, BCI, and BCH algebras.